

Convocatoria extraordinaria de 2023 · Reserva

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

Sean $x, y \geq 0$ los números, con $x + y = 1$, y supongamos que queremos maximizar $x\sqrt{y}$. Escribimos $x = 1 - y$, con $0 \leq y \leq 1$:

$$P(y) = (1 - y)\sqrt{y}, \quad P'(y) = \frac{1 - 3y}{2\sqrt{y}} \quad (0 < y < 1).$$

El único punto crítico es $y = 1/3$, y en los extremos el producto vale cero. Por tanto, el máximo se alcanza para $y = 1/3$, $x = 2/3$ y vale

$$\boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Ejercicio 2

Dividiendo $x^2 + a$ entre $x - b$ se obtiene

$$f(x) = x + b + \frac{a + b^2}{x - b},$$

por lo que la asíntota oblicua es $y = x + b$. Para que sea $y = x + 4$, $b = 4$. Además, $f(1) = (1 + a)/(1 - 4) = -2$, de donde $a = 5$. Con esos valores, $f(0) = -5/4$ y

$$f'(x) = \frac{2x(x - 4) - (x^2 + 5)}{(x - 4)^2}, \quad f'(0) = -\frac{5}{16}.$$

La pendiente de la normal es la opuesta del inverso de la pendiente tangente: $m_n = 16/5$. La recta normal por $(0, -5/4)$ es

$$\boxed{y + \frac{5}{4} = \frac{16}{5}x}.$$

Ejercicio 3

Como $F(x) = e^{x^2}$ es primitiva de f , el teorema fundamental del cálculo da $f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2}$. Su derivada es

$$f'(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0,$$

por lo que f es creciente. En $[0, 1]$ es no negativa y corta el eje en $x = 0$; el área pedida es

$$S = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \boxed{e - 1}.$$

Ejercicio 4

Usamos $t = \sqrt{x}$, de modo que $x = t^2$ y $dx = 2t dt$. Por partes,

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = \int 2t \cos t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C.$$

Al volver a x y aplicar $F(0) = 5$, resulta $2 + C = 5$, es decir, $C = 3$. La primitiva es

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + 3}.$$

Ejercicio 5

La matriz es estrictamente triangular superior, así que $A^3 = 0$. En concreto, A^2 solo puede tener como elemento no nulo el de la posición $(1, 3)$, que vale ab . Por tanto, $A^{10} = 0$. Como $A^3 = 0$, la identidad geométrica finita da

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A^3 = I.$$

Luego la inversa existe para cualquier a, b y es

$$(I + A + A^2)^{-1} = I - A.$$

Ejercicio 6

La matriz $M = A + (\lambda - 1)B$ es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Así, el determinante se anula para $\lambda = 2$ o $\lambda = -1$. Si $\lambda = 2$, M es la matriz de unos y tiene rango 1. Si $\lambda = -1$, tiene rango 2. Para $\lambda = -1$, el sistema homogéneo queda $x + y - z = 0$, $x - y + z = 0$, $-x + y + z = 0$ y su espacio solución es $\{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. La respuesta del apartado a) es $\lambda \in \{-1, 2\}$; para el apartado b),

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1).$$

Ejercicio 7

Un vector normal al plano por A, B, C es proporcional a $(1, -3, 2)$, obtenido mediante el producto vectorial de dos vectores del plano. Con el punto $A = (-1, 0, 0)$, su ecuación es

$$\pi : x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Parametrizamos la recta como $(x, y, z) = (2t + 3, t + 2, t)$. Al sustituir en el plano, el numerador de la distancia es $|t - 2|$; el módulo del normal es $\sqrt{14}$. La condición $d = \sqrt{14}$ se traduce en

$$\frac{|t - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \implies t = 16 \text{ o } t = -12.$$

Los puntos son $(35, 18, 16), (-21, -10, -12)$.

Ejercicio 8

En un paralelogramo con vértices consecutivos P, Q, R, S , las diagonales tienen el mismo punto medio, por lo que $S = P + R - Q$. Así,

$$S = (-1, 2, 3) + (0, 5, 1) - (-2, 1, 0) = (1, 6, 4).$$

Para la recta perpendicular al plano PQR , obtenemos un vector normal mediante

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -3), \quad \overrightarrow{PR} = (1, 3, -2), \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (11, -5, -2).$$

La recta pedida pasa por el origen y lleva ese vector como director; en forma paramétrica:

$$(x, y, z) = t(11, -5, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$