

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2005

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Integración por partes

Aplicamos integración por partes con $u = 2x$ y $dv = f'(x) dx$, de modo que $du = 2 dx$ y $v = f(x)$. Entonces

$$\int_0^1 2x f'(x) dx = [2x f(x)]_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

El término de borde vale cero porque $f(1) = 0$ y en $x = 0$ aparece el factor x . Como la integral de la izquierda es 1,

$$1 = -2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Conclusión. $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}.$

Opción A - Ejercicio 2. Determinación de un polinomio

Escribimos $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. El punto de inflexión $(0, 1)$ impone $p(0) = 1$ y $p''(0) = 0$. El máximo relativo en $x = 1$ exige $p'(1) = 0$ y luego comprobaremos que $p''(1) < 0$. Por último usamos el dato de la integral:

$$\begin{cases} d = 1, \\ 2b = 0, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Con $b = 0$ y $d = 1$, la última condición queda $\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4}$. Junto con $c = -3a$, resulta $a = -\frac{1}{5}$ y $c = \frac{3}{5}$. Además, $p''(1) = 6a + 2b = -\frac{6}{5} < 0$, que confirma que se trata de un máximo. **Conclusión.** $p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1.$

Opción A - Ejercicio 3. Discusión de un sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 3 \\ 1 & 2 & m-2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$\det A = (m-4)(m-2)(m+1).$$

Si $m \notin \{-1, 2, 4\}$, el determinante no se anula: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas, así que el sistema es compatible determinado.

Para los tres valores singulares, los menores de las dos primeras filas y columnas x, y son

$$m = -1 : \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad m = 2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad m = 4 : \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Así, $\text{rg}(A) = 2$ en esos tres casos. Para $m = -1$ y $m = 2$, consideramos además los menores de A^* formados por las columnas x, y y la columna ampliada:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A) = 2$ y ambos sistemas son incompatibles. Para $m = 4$, la segunda fila de A^* es la suma de la primera y la tercera; el menor no nulo anterior garantiza que ambos rangos son dos.

Para $m = 4$, el sistema queda

$$\begin{cases} 3x + y + z = 3, \\ 4x + 3y + 3z = 7, \\ x + 2y + 2z = 4. \end{cases}$$

Las dos últimas incógnitas aparecen como $y + z$. Resolviendo se obtiene $x = \frac{2}{5}$ y $y + z = \frac{9}{5}$. En este caso $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, por lo que hay infinitas soluciones:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} - t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. El sistema es SCD si $m \notin \{-1, 2, 4\}$, SI si $m = -1$ o $m = 2$, y SCI si $m = 4$, con la familia indicada.

Opción A - Ejercicio 4. Distancia a un punto

a) Los puntos a distancia 3 de $P = (1, 3, -1)$ forman una esfera de centro P y radio 3. Usamos la ecuación de la esfera:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

b) La recta está dada paramétricamente por $(x, y, z) = (3\lambda, 1 + \lambda, 1 - 4\lambda)$. Sustituimos estas coordenadas en la ecuación de la esfera:

$$(3\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 9.$$

Al desarrollar y simplificar,

$$26\lambda(\lambda - 1) = 0,$$

por lo que $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. Los puntos correspondientes de la recta son

$$(0, 1, 1) \quad \text{y} \quad (3, 2, -3).$$

Conclusión. Los dos puntos de la recta que están a distancia 3 de P son $(0, 1, 1)$ y $(3, 2, -3)$.

Opción B - Ejercicio 1. Sistema y condición de compatibilidad

a) Tomamos $z = t$ como parámetro libre y resolvemos las ecuaciones restantes:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + y - z = 2. \end{cases}$$

De la primera, $x + 2y = 1 - 3t$. Al combinarla con la segunda se obtiene

$$x = 1 + \frac{5}{3}t, \quad y = -\frac{7}{3}t.$$

Así, todas las soluciones son $(x, y, z) = (1 + \frac{5}{3}t, -\frac{7}{3}t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

b) Para que la ecuación añadida no aumente el rango, sus coeficientes deben ser una combinación lineal de las filas anteriores. Buscamos r, s tales que

$$r(1, 2, 3) + s(2, 1, -1) = (5, 1, \alpha).$$

Las dos primeras coordenadas dan $r = -1$ y $s = 3$, por lo que $\alpha = 3r - s = -6$. Para conservar la compatibilidad, el término independiente debe ser la misma combinación de los términos derechos:

$$\beta = r \cdot 1 + s \cdot 2 = -1 + 6 = 5.$$

Conclusión. Los valores buscados son $\alpha = -6$ y $\beta = 5$; entonces la tercera ecuación depende de las dos primeras y quedan infinitas soluciones.

Opción B - Ejercicio 2. Ecuación matricial

Como A es invertible, partimos de $A^{-1}XA = B$. Multiplicando por A a la izquierda y por A^{-1} a la derecha,

$$X = ABA^{-1}.$$

Con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

calculamos primero

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

y después

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 3. Límites

a) Racionalizamos la diferencia de raíces, multiplicando por la suma conjugada:

$$\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{(x^2 + x) - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}.$$

Al dividir numerador y denominador por x (positivo cuando $x \rightarrow +\infty$),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x}} = 1.$$

Conclusión. El límite del apartado a) es 1.

b) Para $u > 0$ se cumple $\arctan u + \arctan(1/u) = \pi/2$. Entonces

$$x \left(\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \right) = -x \arctan(e^{-x}).$$

Como $0 < \arctan(e^{-x}) < e^{-x}$ para $x > 0$, el valor absoluto queda acotado por xe^{-x} , que tiende a cero. **Conclusión.** El límite del apartado b) es 0.

Opción B - Ejercicio 4. Perpendicular común y distancia entre rectas

Pasamos las rectas a forma paramétrica:

$$r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 3, 4), \quad s : (x, y, z) = (-1, 2, 0) + u(1, -1, 2).$$

Sean $P \in r$ y $Q \in s$ los puntos extremos del segmento perpendicular común. Para que $Q - P$ sea perpendicular a ambos vectores directores, imponemos

$$(Q - P) \cdot (2, 3, 4) = 0, \quad (Q - P) \cdot (1, -1, 2) = 0.$$

Al sustituir las expresiones paramétricas, resulta

$$-29t + 7u = 5, \quad -7t + 6u = 5,$$

de donde $t = \frac{1}{25}$ y $u = \frac{22}{25}$. Por tanto,

$$P = \left(\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25} \right), \quad Q = \left(-\frac{3}{25}, \frac{28}{25}, \frac{44}{25} \right).$$

La recta perpendicular común tiene como dirección el producto vectorial de los directores, proporcional a $(2, 0, -1)$, y pasa por P :

$$(x, y, z) = \left(\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25} \right) + v(2, 0, -1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

La distancia mínima entre las rectas es la longitud de PQ :

$$d(r, s) = |PQ| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Conclusión. La perpendicular común es la recta indicada y la distancia mínima es $3\sqrt{5}/5$.