

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Posición relativa y rectas

Parametrizamos r tomando $z = t$:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t - 1, \\ z = t, \end{cases} \quad \vec{u} = (1, 1, 1).$$

La recta s pasa por $S_0 = (1, 0, 3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas: la coordenada x daría $t = \lambda$, pero la coordenada y exige $t - 1 = \lambda$, lo cual es incompatible. Por tanto, son rectas alabeadas. **Conclusión.** r y s son alabeadas.

b) Recta por P que corta a ambas. Buscamos puntos $R \in r$ y $S \in s$ tales que P, R, S estén alineados. Al igualar los vectores $R - P$ y $S - P$ salvo un factor de proporcionalidad, se obtiene

$$R = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right), \quad S = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 3 \right).$$

En efecto, $R - P = \frac{1}{2}(11, 5, 3)$ y $S - P = \frac{1}{3}(11, 5, 3)$. Así, la recta pedida pasa por $P = (-1, 0, 2)$ y tiene dirección $(11, 5, 3)$:

$$\begin{cases} x = -1 + 11\mu, \\ y = 5\mu, \\ z = 2 + 3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Perpendicular común. Tomamos $R = (4, 2, 3) \in r$ (corresponde a $t = 3$) y $S = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3) \in s$ (corresponde a $\lambda = \frac{5}{2}$). El vector $S - R = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ es perpendicular a las dos rectas, pues su producto escalar con $\vec{u}$ y con $\vec{v}$ vale cero. Por tanto, la perpendicular común es

$$\begin{cases} x = 4 - \mu, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 3, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = (a - 2)(a + 1)$. Si $a \neq 2, -1$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

En los valores singulares $a = 2, -1$, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale $a^2 - 7$, no nulo en ninguno de los dos casos; por ello $\text{rg}(A) = 2$. Si $a = 2$, la primera fila es $2F_2 + 3F_3$, y los términos independientes cumplen la misma relación: $0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2)$. Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. Si $a = -1$, se cumple $F_1 + F_2 - 6F_3 = 0$ en los coeficientes, pero $0 + 3 - 6(-2) = 15 \neq 0$ en la columna ampliada; así, $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** Es SCD si $a \neq 2, -1$, SCI si $a = 2$ y SI si $a = -1$.

b) Resolución para $a = 4$. El sistema es

$$\begin{cases} 4x + 7y + 5z = 0, \\ x + 4y + z = 3, \\ y + z = -2. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $z = -2 - y$. La segunda da $x = 5 - 3y$. Al sustituir ambas expresiones en la primera,

$$4(5 - 3y) + 7y + 5(-2 - y) = 0 \implies y = 1.$$

Entonces $x = 2$ y $z = -3$. **Conclusión.** Para $a = 4$, $(x, y, z) = (2, 1, -3)$.

c) Resolución para $a = 2$. La tercera ecuación da $y = -2 - z$. Sustituyendo en la segunda, $x = 7 + z$. La primera queda satisfecha por la dependencia ya indicada, así que tomamos $z = t$ libre:

$$(x, y, z) = (7 + t, -2 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 2$, las soluciones forman esa familia de un parámetro.

Opción A - Ejercicio 3. Asíntotas y tangente

La función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$ es racional y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Como el numerador tiende a 27 y el denominador a cero positivo cuando $x \rightarrow 3$, hay una asíntota vertical $x = 3$ y $f(x) \rightarrow +\infty$ por ambos lados.

Dividiendo polinomios,

$$\frac{x^3}{(x-3)^2} = x + 6 + \frac{27x - 54}{(x-3)^2}.$$

El resto dividido por el denominador tiende a cero al infinito, de modo que la asíntota oblicua es $y = x + 6$.

Para la tangente en $x = 2$, calculamos

$$f(2) = 8, \quad f'(x) = \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3}, \quad f'(2) = 28.$$

La recta tangente cumple $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, luego

$$y - 8 = 28(x - 2).$$

Conclusión. Las asíntotas son $x = 3$ e $y = x + 6$; la tangente en $x = 2$ es $y = 28x - 48$.

Opción A - Ejercicio 4. Integrales

a) Separamos la integral en dos partes. En la primera usamos que la derivada de $x^2 + 9$ es $2x$; en la segunda aparece la forma de la arcotangente:

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

b) Dividimos cada término por x^3 para integrar potencias:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} + x \right) dx \\ &= \left[-\frac{3}{2x^2} - \ln x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{21}{8} - \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusión. Los resultados son $\frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$ y $\frac{21}{8} - \ln 2$.

Opción B - Ejercicio 1. Extremos, inflexión e integral

La función $f(x) = 2 \cos^2 x$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. En el intervalo cerrado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, los extremos pueden aparecer en los extremos del intervalo o donde la derivada se anula:

$$f'(x) = -2 \sin(2x) = 0 \implies x = 0.$$

Evaluando en $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ obtenemos 0, 2, 0. Por tanto, el máximo absoluto es 2 en $x = 0$ y el mínimo absoluto es 0 en los dos extremos.

La segunda derivada es $f''(x) = -4 \cos(2x)$. Se anula en $x = \pm \frac{\pi}{4}$ y cambia de signo en ambos puntos; allí $f(x) = 1$. Los puntos de inflexión del intervalo son $(-\frac{\pi}{4}, 1)$ y $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

Usando $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x)$,

$$\int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 x dx = \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusión. Máximo absoluto 2 en $x = 0$, mínimos absolutos 0 en $x = \pm \frac{\pi}{2}$, puntos de inflexión $(\pm \frac{\pi}{4}, 1)$ e integral $\frac{\pi}{2}$.

Opción B - Ejercicio 2. Ecuaciones y determinantes matriciales

La ecuación $XA = B$ tiene solución única cuando A es invertible. Calculamos

$$\det A = \lambda + 1.$$

Por tanto, la solución es única para $\lambda \neq -1$. Para $\lambda = 4$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}.$$

Para el determinante del apartado c), usamos $\det(A^2B) = \det(A)^2 \det(B)$. Como $\det(B) = -1$,

$$\det(A^2B) = -(\lambda + 1)^2.$$

Conclusión. La solución es única si $\lambda \neq -1$; para $\lambda = 4$, X es la matriz indicada, y $\det(A^2B) = -(\lambda + 1)^2$.

Opción B - Ejercicio 3. Intersección con una esfera y distancia

a) Cortes de la recta con la esfera. Parametrizamos la recta desde $P = (4, 6, 2)$ con vector director $\vec{d} = (2, 1, 1)$:

$$X(t) = (4 + 2t, 6 + t, 2 + t).$$

La distancia de $X(t)$ al centro $C = (1, 2, -1)$ debe ser el radio $\sqrt{26}$. Igualamos los cuadrados de las distancias:

$$(3 + 2t)^2 + (4 + t)^2 + (3 + t)^2 = 26 \implies 3t^2 + 13t + 4 = 0.$$

Las raíces son $t = -4$ y $t = -\frac{1}{3}$. Al sustituir:

$$X(-4) = (-4, 2, -2), \quad X\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Conclusión. Los puntos de corte son $(-4, 2, -2)$ y $\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

b) Distancia del punto a la recta. La recta tiene punto $R_0 = (1, -2, 3)$ y vector director $\vec{d} = (2, 1, 2)$. Usamos la fórmula de distancia de un punto a una recta en el espacio:

$$d(Q, r) = \frac{\|(Q - R_0) \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Con $Q - R_0 = (-3, 3, -3)$,

$$(Q - R_0) \times \vec{d} = (9, 0, -9), \quad \|(Q - R_0) \times \vec{d}\| = 9\sqrt{2}, \quad \|\vec{d}\| = 3.$$

Conclusión. La distancia es $3\sqrt{2}$.

Opción B - Ejercicio 4. Plano y ángulo

Parametrizamos la recta dada por la intersección de dos planos. Tomando $x = t$, resulta $y = 2t + 1$ y $z = 3t - 3$, así que su vector director es $\vec{d} = (1, 2, 3)$. El plano π tiene normal $\vec{n} = (2, -1, 1)$.

a) Plano por P , paralelo a r y perpendicular a π . El vector normal del plano buscado debe ser perpendicular a $\vec{d}$ (porque contiene una dirección de r) y a $\vec{n}$ (porque los planos son perpendiculares). Podemos tomar $\vec{m} = \vec{n} \times \vec{d} = (-5, -5, 5) \sim (1, 1, -1)$. Usando $P = (1, 0, -1)$,

$$(x - 1) + y - (z + 1) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $x + y - z - 2 = 0$.

b) Ángulo entre r y π . Si θ es dicho ángulo, el seno se calcula con el producto escalar de la dirección de la recta y la normal del plano:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}}.$$

Conclusión. $\theta = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right)$.