

# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

## Julio de 2023 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

### Problema 1 · Potencias e inversas de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Multiplicamos  $A$  por sí misma:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos  $\det A = 1(2) - 1(0 - 2) = 4$ , así que  $\det(A^2) = (\det A)^2 = 16 \neq 0$  y la inversa existe. Aplicando  $M^{-1} = \text{adj}(M) / \det M$ ,

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Despejamos  $X$  multiplicando por la izquierda por  $(A^2)^{-1}$ :

$$2A^2X = 4B \implies X = 2(A^2)^{-1}B.$$

El producto es

$$(A^2)^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{16} & 0 & -\frac{7}{8} \\ \frac{33}{16} & -2 & \frac{3}{8} \\ \frac{23}{16} & -2 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & -\frac{7}{4} \\ \frac{33}{8} & -4 & \frac{3}{4} \\ \frac{23}{8} & -4 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & -\frac{7}{4} \\ \frac{33}{8} & -4 & \frac{3}{4} \\ \frac{23}{8} & -4 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

### Problema 2 · Reparto de una herencia

Sean  $x, y, z$  los millones de euros que reciben, respectivamente, la hija mayor, la mediana y la pequeña. Traducimos cada condición a una ecuación:

$$x = 9 + \frac{y+z}{2}, \quad y = \frac{x+z}{2}, \quad z = 0,35(x+y).$$

De la tercera ecuación,  $z = \frac{7}{20}(x+y)$ . Al sustituirla en la segunda,

$$y = \frac{1}{2} \left( x + \frac{7}{20}(x+y) \right) \implies 33y = 27x \implies y = \frac{9}{11}x.$$

Entonces  $z = \frac{7}{11}x$ . Sustituimos ambas expresiones en la primera:

$$x = 9 + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{11}x + \frac{7}{11}x \right) \implies \frac{3}{11}x = 9 \implies x = 33.$$

Por tanto,  $y = 27$  y  $z = 21$ . Las tres cantidades verifican las condiciones del enunciado.

Hija mayor: 33 millones; mediana: 27 millones; pequeña: 21 millones.

### Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es  $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$ .

a) El denominador se anula en  $x = \pm 1$ , así que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

El numerador se anula en  $x = 5/4$ , que da el corte  $(5/4, 0)$ . Además,  $f(0) = 5/2$ , por lo que el corte con  $Y$  es  $(0, 5/2)$ .

b) Como el numerador no se anula en  $x = \pm 1$ , ambos son asíntotas verticales. Al tener el numerador menor grado que el denominador,  $f(x) \rightarrow 0$  en ambos infinitos; la asíntota horizontal es  $y = 0$ .

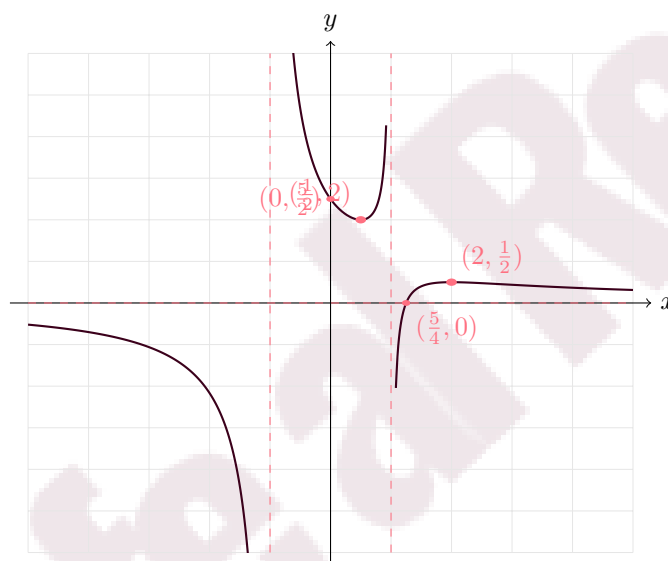
c) y d) Derivamos y resolvemos  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = \frac{4 \cdot 2(x^2 - 1) - (4x - 5)4x}{[2(x^2 - 1)]^2} = \frac{-8x^2 + 20x - 8}{4(x^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio. El numerador se anula en  $x = 1/2$  y  $x = 2$ . El signo de  $f'$  es negativo antes de  $1/2$ , positivo entre  $1/2$  y  $2$ , y negativo después de  $2$ ; también separamos en las asíntotas  $x = \pm 1$ . De ahí resulta un mínimo local en  $x = 1/2$  y un máximo local en  $x = 2$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad f(2) = \frac{1}{2}.$$

e) La gráfica recoge los cortes, las asíntotas y los extremos:



Asíntotas:  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ ;  $\min_{\text{loc}} f = 2$  en  $x = \frac{1}{2}$ ;  $\max_{\text{loc}} f = \frac{1}{2}$  en  $x = 2$ .

#### Problema 4 · Consumo de energía

El consumo por hora es

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & 0 \leq x \leq 6, \\ -x^2 + 24x - 82, & 6 < x \leq 18, \\ -x + 34, & 18 < x \leq 24. \end{cases}$$

a) En  $x = 6$ , el valor del primer tramo y el límite del segundo coinciden:

$$f(6) = 26, \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -36 + 144 - 82 = 26.$$

En  $x = 18$ , el límite por la izquierda es  $-324 + 432 - 82 = 26$ , mientras que el valor y el límite por la derecha son  $-18 + 34 = 16$ . Por tanto, la función es continua en  $x = 6$  y discontinua en  $x = 18$ ; en el resto de cada tramo es continua.

b) En el primer tramo la función crece. En el segundo,  $f'(x) = -2x + 24$ , de modo que crece hasta  $x = 12$  y decrece desde ahí hasta  $18$ . En el tercer tramo decrece. Comparamos los valores relevantes:

$$f(0) = 14, \quad f(6) = 26, \quad f(12) = 62, \quad f(18) = 16, \quad f(24) = 10.$$

Así, el máximo absoluto es 62 MWh a las 12 h y el mínimo absoluto es 10 MWh a las 24 h.

c) Entre las 8 h y las 10 h se aplica el segundo tramo. La energía consumida es la integral del consumo por hora:

$$\int_8^{10} (-x^2 + 24x - 82) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x \right]_8^{10} = \frac{316}{3} \text{ MWh}.$$

$$f_{\max} = 62 \text{ MWh } (x = 12); \quad f_{\min} = 10 \text{ MWh } (x = 24); \quad E_{8-10} = \frac{316}{3} \text{ MWh}.$$

### Problema 5 · Especialistas de la estación espacial

El total de especialistas es  $10 + 20 + 21 + 19 = 70$ . Hay  $20 + 19 = 39$  especialistas europeos. En ciencias hay  $21 + 19 = 40$  personas, de las cuales  $12 + 10 = 22$  son mujeres y, por tanto, 18 son hombres. En ingeniería hay  $7 + 9 = 16$  mujeres.

a) La probabilidad de elegir una persona europea es

$$P(\text{Europa}) = \frac{39}{70}.$$

b) La probabilidad de elegir un hombre especialista en ciencias es

$$P(\text{hombre y ciencias}) = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}.$$

c) Entre las 38 mujeres (22 de ciencias y 16 de ingeniería),

$$P(\text{ciencias} \mid \text{mujer}) = \frac{22}{38} = \frac{11}{19}, \quad P(\text{ingeniería} \mid \text{mujer}) = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}.$$

Es más probable que sea especialista en ciencias.

d) La probabilidad de mujer e ingeniería es  $16/70 = 8/35$ . Si los sucesos fueran independientes, tendría que ser

$$P(\text{mujer})P(\text{ingeniería}) = \frac{38}{70} \cdot \frac{30}{70} = \frac{57}{245},$$

pero  $8/35 = 56/245 \neq 57/245$ . No son independientes.

$$P(\text{Europa}) = \frac{39}{70}; \quad P(\text{hombre y ciencias}) = \frac{9}{35}; \quad \text{más probable: ciencias; no son independientes.}$$

### Problema 6 · Internet y televisión de pago

Sean  $A$  y  $B$  los sucesos de tener internet con las compañías  $A$  y  $B$ , y  $C$  el de tener televisión de pago. Así,  $P(A) = 0,7$ ,  $P(B) = 0,3$ ,  $P(C) = 0,65$  y  $P(C \mid B) = 0,5$ .

a) La probabilidad total de contratar televisión permite hallar  $P(C \mid A)$ :

$$0,65 = 0,7P(C \mid A) + 0,3(0,5) \implies P(C \mid A) = \frac{5}{7}.$$

Luego,

$$P(A \cap C^c) = P(A)P(C^c \mid A) = 0,7 \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 0,20.$$

b) Aplicamos Bayes a los hogares sin televisión de pago:

$$P(B \mid C^c) = \frac{P(B)P(C^c \mid B)}{P(C^c)} = \frac{0,3(0,5)}{0,35} = \frac{3}{7}.$$

c) La intersección  $A \cap C$  tiene probabilidad  $0,7(5/7) = 0,5$ . Por la fórmula de la unión,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,7 + 0,65 - 0,5 = 0,85.$$

$$P(A \cap C^c) = 0,20; \quad P(B \mid C^c) = \frac{3}{7}; \quad P(A \cup C) = 0,85.$$