

Junio de 2007 · Convocatoria ordinaria

La prueba permite elegir tres de los cuatro bloques. Aquí se resuelven los ocho problemas para que queden desarrollados todos los apartados.

Bloque 1 · Álgebra lineal · Problema 1.1

Las matrices del enunciado son

$$B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Determinante de $3B(x)$

Desarrollamos $\det B(x)$ por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det B(x) &= (x+2)(3 \cdot 6 - 6 \cdot 2) - 4((2x+3) \cdot 6 - 6(4x+4)) \\ &\quad + 6((2x+3) \cdot 2 - 3(4x+4)) \\ &= 6(x+2) - 4(-12x-6) + 6(-8x-6) = 6x. \end{aligned}$$

Para una matriz cuadrada de orden 3 se cumple $\det(kB) = k^3 \det B$. Por eso,

$$\det(3B(x)) = 3^3 \det B(x) = 27 \cdot 6x = 162x.$$

Pedimos que este determinante valga 162:

$$162x = 162 \implies \boxed{x = 1}.$$

b) Inversa de $C(y)$

Llamemos F_1, F_2, F_3 a las filas de $C(y)$. Comprobamos la misma relación en las tres entradas:

$$3F_2 - F_1 = (3(2y+3) - (3y+5), 3 \cdot 3 - 7, 3 \cdot 6 - 12) = (3y+4, 2, 6) = F_3.$$

Las filas son dependientes para todo valor real de y , así que $\det C(y) = 0$ y la matriz no es invertible:

$$\boxed{C(y) \text{ no tiene inversa para ningún } y \in \mathbb{R}.}$$

Bloque 1 · Álgebra lineal · Problema 1.2

El sistema es

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 9, \\ 3x + 5y + z = 9, \\ \alpha x + y + z = 9. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Discusión por Rouché-Frobenius

Calculamos primero el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= 1(5-1) - \alpha(3-\alpha) + (3-5\alpha) \\ &= \alpha^2 - 8\alpha + 7 = (\alpha-1)(\alpha-7). \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 1, 7$: $\det A \neq 0$, por tanto $\text{rg}(A) = 3$. La ampliada tiene tres filas y contiene a A , luego $\text{rg}(A^*) = 3$. Los rangos coinciden y valen el número de incógnitas: es un sistema compatible determinado (SCD).

Además, $(x, y, z) = (0, 0, 9)$ satisface las tres ecuaciones para todo α , pues cada primer miembro vale 9. En los casos SCD, esa es la única solución.

Si $\alpha = 1$: las filas primera y tercera de A , y también las correspondientes filas de A^* , son iguales. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: es compatible indeterminado (SCI). Para ver sus soluciones, restamos la primera ecuación de la segunda:

$$2x + 4y = 0 \implies x = -2y.$$

Tomando $y = t$, la primera ecuación da $z = 9 + t$, por lo que

$$(x, y, z) = (-2t, t, 9 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 7$: la tercera fila es -2 veces la primera más 3 veces la segunda; esto también se cumple en la ampliada, pues $-2 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 9$. Un menor de orden 2 no nulo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, y también es SCI. Para resolver este caso, restamos la primera ecuación de la segunda y de la tercera:

$$2x - 2y = 0, \quad 6x - 6y = 0 \implies x = y.$$

Al sustituir $y = x$ en la primera ecuación resulta $z = 9 - 8x$. Entonces

$$(x, y, z) = (t, t, 9 - 8t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En conclusión, el sistema es compatible para todo α y es indeterminado exactamente para $\alpha = 1$ o $\alpha = 7$. Para $\alpha = 7$, la familia de soluciones es la indicada arriba.

Bloque 2 · Geometría · Problema 2.1

Convertimos las ecuaciones simétricas dadas a paramétricas. Para r , usamos el parámetro t ; para s , el parámetro u :

$$r : x = 1 + 2t, \quad y = \frac{1}{2} - 3t, \quad z = \frac{3}{2} + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$s : x = 3 - 2u, \quad y = -\frac{3}{2} + u, \quad z = 1 + 4u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Punto de corte

Igualemos las coordenadas x e y de ambas rectas:

$$1 + 2t = 3 - 2u \implies t + u = 1, \quad \frac{1}{2} - 3t = -\frac{3}{2} + u \implies 3t + u = 2.$$

Restando las ecuaciones se obtiene $2t = 1$, luego $t = 1/2$ y $u = 1/2$. La coordenada z coincide también: $3/2 + 3(1/2) = 1 + 4(1/2) = 3$. Por tanto,

$$P = (2, -1, 3).$$

b) Vectores directores y ángulo

Leyendo los coeficientes de los parámetros, los vectores directores son

$$v_r = (2, -3, 3), \quad v_s = (-2, 1, 4).$$

El ángulo agudo entre dos rectas se calcula mediante el valor absoluto del producto escalar:

$$\cos \theta = \frac{|v_r \cdot v_s|}{\|v_r\| \|v_s\|} = \frac{|-4 - 3 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}.$$

Así,

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{462}}\right) \approx 76.55^\circ.$$

c) Plano que contiene las dos rectas

Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial de las direcciones:

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s = (-15, -14, -4),$$

por lo que podemos usar el normal $\mathbf{n} = (15, 14, 4)$. El plano general de normal (a, b, c) que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ cumple $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Sustituyendo:

$$15(x - 2) + 14(y + 1) + 4(z - 3) = 0 \implies \boxed{\pi : 15x + 14y + 4z - 28 = 0}.$$

Bloque 2 · Geometría · Problema 2.2

La recta y el punto son

$$r : x = -2 + 3\lambda, y = -2\lambda, z = 1 + 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R}, Q = (3, -1, 4).$$

Tomamos el punto $P_0 = (-2, 0, 1)$ de la recta y su vector director $\mathbf{v}_r = (3, -2, 4)$. Entonces

$$\overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = (5, -1, 3).$$

a) Distancia del punto a la recta

La distancia de un punto Q a una recta que pasa por P_0 y tiene dirección $\mathbf{v}_r$ es

$$d(Q, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0Q} \times \mathbf{v}_r\|}{\|\mathbf{v}_r\|}.$$

Calculamos los productos y módulos:

$$\overrightarrow{P_0Q} \times \mathbf{v}_r = (2, -11, -7), \|(2, -11, -7)\| = \sqrt{174}, \|\mathbf{v}_r\| = \sqrt{29}.$$

Por tanto,

$$\boxed{d(Q, r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}}.$$

b) Comprobar que las rectas no se cortan

La otra recta, en forma paramétrica, es

$$s : x = 3 + \mu, y = -1 - \mu, z = 4 + \mu, \mu \in \mathbb{R},$$

con vector director $\mathbf{v}_s = (1, -1, 1)$. Los directores no son proporcionales, porque

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s = (2, 1, -1) \neq (0, 0, 0).$$

Si las rectas se cortaran, el vector que une sus puntos P_0 y Q sería combinación lineal de los dos vectores directores; en consecuencia, su producto mixto sería cero. Pero

$$\overrightarrow{P_0Q} \cdot (\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s) = (5, -1, 3) \cdot (2, 1, -1) = 10 - 1 - 3 = 6 \neq 0.$$

No son coplanarias y, por ello, no se cortan: son rectas cruzadas.

c) Distancia entre las rectas

Para dos rectas cruzadas, la distancia es el valor absoluto del producto mixto de la separación con sus directores, dividido por el módulo del producto vectorial de los directores:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \cdot (\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s)|}{\|\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s\|} = \frac{6}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \boxed{\sqrt{6}}.$$

Bloque 3 · Análisis · Problema 3.1

Sean

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5, g(x) = 6x^2 - 7x + 2.$$

Dominio y asíntotas

Factorizamos el denominador para determinar el dominio:

$$g(x) = 6x^2 - 7x + 2 = (3x - 2)(2x - 1).$$

El dominio de f/g es $\mathbb{R} \setminus \{1/2, 2/3\}$, porque el denominador se anula exactamente en esos dos puntos. Comprobamos si producen asíntotas verticales:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \neq 0, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \neq 0.$$

En $x = 1/2$, el cociente se comporta como $1/(x - 1/2)$; en $x = 2/3$, como $1/(x - 2/3)$. Por ello,

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x \rightarrow (2/3)^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (2/3)^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Así que las dos asíntotas verticales son $x = 1/2$ y $x = 2/3$.

En el infinito, el cociente se comporta como $12x^3/(6x^2) = 2x$, de modo que tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y a $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. No hay asíntota horizontal. Como los grados del numerador y del denominador difieren en una unidad, comprobamos la posible oblicua dividiendo:

$$\frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}.$$

El último cociente tiende a 0 en ambos extremos, por lo que la asíntota oblicua es $y = 2x + 1$. No hay otras asíntotas.

Primitiva H con $H(1) = 1$

Usamos la división anterior y descomponemos la fracción restante:

$$\frac{12x - 7}{(3x - 2)(2x - 1)} = \frac{3}{3x - 2} + \frac{2}{2x - 1},$$

ya que $3(2x - 1) + 2(3x - 2) = 12x - 7$. Integramos cada término, conservando la constante:

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int (2x + 1) dx + \int \frac{3}{3x - 2} dx + \int \frac{2}{2x - 1} dx$$
$$= x^2 + x + \ln |3x - 2| + \ln |2x - 1| + C.$$

La condición $H(1) = 1$ fija la constante en el intervalo que contiene a 1:

$$1 = 1^2 + 1 + \ln 1 + \ln 1 + C = 2 + C \implies C = -1.$$

El intervalo que contiene a 1 es $(2/3, \infty)$, así que allí $C = -1$. Para dar una primitiva en todo el dominio, podemos tomar también esa misma constante en los otros intervalos. (Al estar el dominio separado por los polos, la condición en $x = 1$ no determina por sí sola las constantes de los otros componentes.) Por tanto, una función que cumple lo pedido es

$$H(x) = x^2 + x + \ln |3x - 2| + \ln |2x - 1| - 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Bloque 3 · Análisis · Problema 3.2

La función es $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Su dominio es $\mathbb{R}$, porque es polinómica. Una tangente es paralela al eje OX cuando su pendiente, $f'(x)$, vale cero.

Comprobamos también las asíntotas: no hay verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. En los extremos, el término dominante es x^3 , así que $f(x)$ no tiende a un valor finito y no hay asíntota horizontal. Tampoco hay oblicua: para cualquier recta $y = mx + n$, la diferencia $f(x) - (mx + n)$ conserva el término dominante x^3 y no tiende a cero.

a) Valores de a y b

Derivamos y aplicamos la condición en las dos abscisas dadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f'(2) = 12 + 4a + b = 0, \quad f'(4) = 48 + 8a + b = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -48 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $4 \cdot 1 - 8 \cdot 1 = -4 \neq 0$, así que tiene solución única. Restando las ecuaciones se obtiene $4a = -36$, de donde $a = -9$; al sustituir en la primera, $-36 + b = -12$, y por tanto $b = 24$. En efecto, con estos valores

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4).$$

El signo de la derivada confirma que las pendientes se anulan en las abscisas pedidas y muestra el comportamiento de la función:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, 2)$	$x = 1 : f'(1) = 3(1-2)(1-4) = 9 > 0$	+	crece
$(2, 4)$	$x = 3 : f'(3) = 3(3-2)(3-4) = -3 < 0$	-	decrece
$(4, \infty)$	$x = 5 : f'(5) = 3(5-2)(5-4) = 9 > 0$	+	crece

El signo cambia de + a - en $x = 2$, así que allí hay un máximo local; en $x = 4$ cambia de - a +, así que hay un mínimo local. Las tangentes en ambas abscisas son horizontales.

b) Punto de inflexión sobre el eje OX

Con esos valores,

$$f''(x) = 6x + 2a = 6x - 18.$$

La abscisa del posible punto de inflexión satisface $f''(x) = 0$, luego $x = 3$. Como $f''(2) = -6 < 0$ y $f''(4) = 6 > 0$, la concavidad cambia de signo y realmente hay un punto de inflexión en $x = 3$. Para que ese punto esté en el eje OX , su ordenada debe ser cero:

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + c = 27 - 81 + 72 + c = 18 + c = 0,$$

$$\boxed{c = -18}.$$

En conjunto, $\boxed{a = -9, b = 24, c = -18}$.

Con estos valores, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$. Como domina el término x^3 ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, los extremos hallados en $x = 2$ y $x = 4$ son locales, no absolutos; la función no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

Bloque 4 · Resolución de problemas · Problema 4.1

Sea x la producción diaria, en toneladas, de acero de baja calidad. La producción de acero de alta calidad es

$$y(x) = \frac{40 - 5x}{10 - x}.$$

El enunciado limita la producción baja a 8 toneladas. Además, para $0 \leq x \leq 8$, el numerador $5(8 - x)$ es no negativo y el denominador $10 - x \geq 2$ es positivo. Por tanto, el intervalo factible es $[0, 8]$.

Función de venta y máximo

Con precios de 100 euros por tonelada de acero bajo y 250 euros por tonelada de acero alto, el valor diario de venta es

$$V(x) = 100x + 250 \frac{40 - 5x}{10 - x} \text{ euros.}$$

Para comprobar también las asíntotas de la expresión racional, la reescribimos:

$$V(x) = 100x + 1250 + \frac{2500}{x - 10}.$$

La extensión algebraica tiene una asíntota vertical en $x = 10$ y una oblicua $y = 100x + 1250$, pues el término fraccionario tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. No tiene horizontal, ya que $V(x)$ crece sin límite en esos extremos. La asíntota vertical queda fuera del dominio físico $[0, 8]$, así que no afecta al problema.

Aplicamos la regla del cociente para derivar la producción de alta calidad:

$$y'(x) = \frac{(-5)(10 - x) - (40 - 5x)(-1)}{(10 - x)^2} = -\frac{10}{(10 - x)^2}.$$

Por consiguiente,

$$V'(x) = 100 + 250y'(x) = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2}.$$

Buscamos los puntos críticos del intervalo:

$$V'(x) = 0 \implies (10-x)^2 = 25.$$

Como $0 \leq x \leq 8$, se tiene $10-x > 0$, así que la única solución admisible es $x = 5$ (la otra, $x = 15$, queda fuera del intervalo). El signo de la derivada es

x	$[0, 5)$	5	$(5, 8]$
$V'(x)$	+	0	-

Comprobamos el signo con un valor de cada intervalo. Como los denominadores son positivos,

$$V'(2) = \frac{100 \cdot 64 - 2500}{64} > 0, \quad V'(6) = \frac{100 \cdot 16 - 2500}{16} < 0.$$

La venta crece hasta 5 toneladas y luego decrece. Comprobamos también los extremos:

$$V(0) = 1000, \quad V(5) = 100 \cdot 5 + 250 \cdot 3 = 1250, \quad V(8) = 800.$$

Así, el máximo global se obtiene produciendo **5 toneladas de acero de baja calidad**. En ese punto se producen 3 toneladas de acero de alta calidad y el valor máximo de venta es **1250 euros diarios**.

Problema 4.2

Los dos vértices inferiores del rectángulo están en el eje OX , así que su lado inferior está sobre ese eje. El lado superior es paralelo; por tanto, sus dos vértices tienen la misma altura en la parábola $y = 12 - x^2$. Como la parábola es simétrica respecto del eje y , esos vértices tienen abscisas opuestas.

Llamamos $a \geq 0$ a la mitad de la anchura. Los vértices superiores son $(-a, 12 - a^2)$ y $(a, 12 - a^2)$. La anchura es $2a$ y la altura $12 - a^2$, que debe ser no negativa. Así, $0 \leq a \leq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Área máxima

El área del rectángulo es base por altura:

$$A(a) = 2a(12 - a^2) = 24a - 2a^3.$$

La función de área es polinómica, así que no tiene asíntotas verticales. Como su término dominante es $-2a^3$, tampoco se aproxima a una recta horizontal u oblicua cuando $|a| \rightarrow \infty$. En el cartel solo consideramos el intervalo geométrico acotado $[0, 2\sqrt{3}]$.

Derivamos y buscamos los puntos críticos del intervalo:

$$A'(a) = 24 - 6a^2 = 6(4 - a^2) = 0 \implies a = \pm 2.$$

Como $a \geq 0$, solo $a = 2$ es admisible. Además, $A(0) = A(2\sqrt{3}) = 0$, y el signo de la derivada cambia de positivo a negativo en $a = 2$:

a	$[0, 2)$	2	$(2, 2\sqrt{3}]$
$A'(a)$	+	0	-

Verificamos los signos tomando un valor a cada lado del punto crítico, ambos dentro del dominio:

$$A'(1) = 24 - 6 = 18 > 0, \quad A'(3) = 24 - 54 = -30 < 0.$$

El área máxima se da en $a = 2$. Por tanto, la anchura es $2a = 4$ unidades y la altura es $12 - a^2 = 12 - 4 = 8$ unidades. El cartel de área máxima mide **4 unidades de anchura por 8 unidades de altura** y su área es

32 unidades cuadradas.