

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 Susana dejó su trabajo como CEO de una multinacional cosmética que utiliza productos químicos por discrepancias con el director general de la empresa. Empleó su indemnización para montar una pequeña empresa de fabricación y distribución de cosmética 100 % natural.

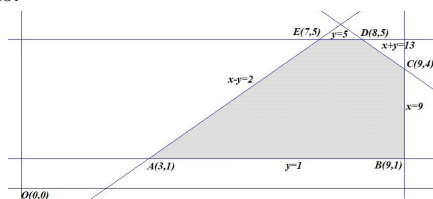
- a) (1,5 puntos) Para hacer un preparado de crema hidratante necesita hacer un pedido de aceite de argán, usado en cosmética por sus propiedades hidratantes. Susana trabaja con dos distribuidoras de materia primas, *Saviah* y *Naturaelis*. *Saviah* puede suministrarle como máximo 9 litros de aceite de argán y *Naturaelis* un máximo de 5 litros. Además, ha firmado un acuerdo con *Saviah* por el que se compromete a comprar, en cada pedido, como mínimo 2 litros más de aceite que los que compre a *Naturaelis*. Se ha comprometido a comprar a *Naturaelis* como mínimo 1 litro de aceite de argán en cada pedido. Susana tiene aceite de argán de un pedido anterior por lo que, en este momento, solo puede comprar como máximo 13 litros de aceite de argán para poder conservarlo en óptimas condiciones. En cada pedido, *Saviah* le regala 3 litros de agua destilada por cada litro de aceite de argán que compre y *Naturaelis* 2 litros por cada litro de aceite de argán que compre. Determine la cantidad de aceite de argán que debe comprar a cada una de las distribuidoras de materias primas naturales para obtener como regalo la mayor cantidad de agua destilada.
- b) (1 punto) Además de aceite de argán necesita un total de 18 litros de aceite de rosa mosqueta, entre el que tiene almacenado y el que comprará a *Saviah* y *Naturaelis*. A *Naturaelis* compra el doble de aceite de rosa mosqueta del que tiene almacenado. El aceite que compra a *Saviah* es tanto como el que tiene almacenado más el que compra a *Naturaelis*. Determine la cantidad de aceite de rosa mosqueta que compra a cada una de las distribuidoras de materias primas, así como la cantidad que tiene almacenada.

Solución:

- a) Sean x los litros pedidos a *Saviah* e y a *Naturaelis*.

Función objetivo $f(x, y) = 3x + 2y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x \leq 9 \\ y \leq 5 \\ x \geq y + 2 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq 13 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 13 \\ x - y \geq 2 \\ x \leq 9 \\ y \leq 5 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

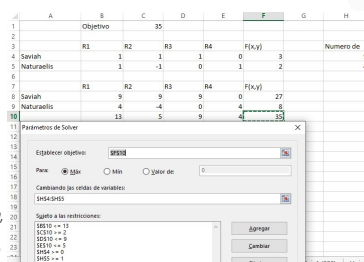


Con vértices en $A(3, 1)$, $B(9, 1)$, $C(9, 4)$, $D(8, 5)$ y $E(7, 5)$.

Sustituyendo en la función objetivo:

$$\begin{cases} f(3,1) = 11 \\ f(9,1) = 29 \\ f(9,4) = 35 \leftarrow \text{máximo} \\ f(8,5) = 34 \\ f(7,5) = 31 \end{cases}$$

Habría que encargar 9 litros de aceite de argán a *Saviah* y 4 litros a *Naturaelis* con un regalo máximo de 35 litros de agua destilada.



- b) Sean x los litros de aceite de rosa mosqueta que compra a *Saviah*, y a *Naturaelis* y z la cantidad de aceite almacenada.

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ y = 2z \\ x = z + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -18 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -6z = -18 \Rightarrow z = 3 \\ y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x + 6 + 3 = 18 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes:
a) o b)

Problema 2 (2,5 puntos)

- a) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - a} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a.1. (1,5 puntos) Para $a = 1$ calcule el dominio y las asíntotas de la función.
a.2. (1 punto) Para $a = 2$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
b) (2,5 puntos) Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + a$$

- b.1. (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 0$ y $F(2) = 4$.
b.2. (1,5 puntos) Para $a = 9$ determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

Solución:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - a} & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a.1. para $a = 1$:

La rama $x \leq 3$ es un cociente de polinomios y su denominador se anula en $x = 1$ que pertenece a la rama y en él la función no existe. La rama $x > 3$ es un polinomio y la función existe en cualquier punto de la rama.

En conclusión: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas: Sólo hay en la rama $x \leq 3$

• Verticales: en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x}{x - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{x - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: No hay. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} = -\infty$

• Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x - 1} \right) = 2$$

$$y = x + 2$$

a.2. En $x = 0$ se encuentra en la rama $x \leq 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ el punto de tangencia es $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2} \Rightarrow m = f'(0) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{y - y_0 = m(x - x_0)} y = -\frac{1}{2}x$$

b) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + a \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 18x - 12$

b.1. $F(x) = \int (-2x^3 + 9x^2 - 12x + a) dx = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 6x^2 + ax + C$

Se cumple que $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ y $F(2) = -8 + 24 - 24 + 2a + 0 = 4 \Rightarrow a = 6$.

b.2. Si $a = 9 \Rightarrow f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9$

Puntos de corte:

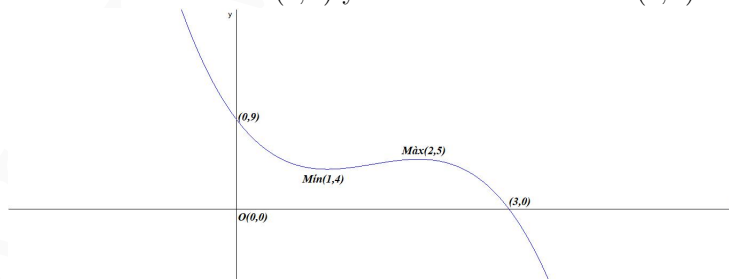
- Con OY: hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, 9)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 + 9x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow (3, 0)$

Monotonía:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = 2.$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(1, 2)$. Tiene un mínimo relativo en $(1, 4)$ y un máximo relativo en $(2, 5)$



EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b).

Problema 3 (2,5 puntos)

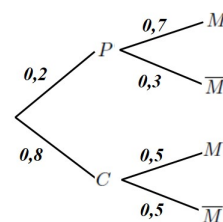
- a) De dos sucesos A y B se sabe que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = 0,9$ Resuelva las siguientes preguntas:
- (1 punto) Obtenga la probabilidad de que ocurra el suceso B .
 - (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A .
 - (0,5 puntos) Determine razonadamente si los sucesos A y B son independientes. Justifique si son incompatibles.
- b) Susana tiene dos cuentas en una red social: una personal y la otra de su marca de cosmética natural. Solo el 20 % de las publicaciones las hace en su cuenta personal. En la cuenta de la marca de cosmética solo el 50 % de las publicaciones recibe más de 100 *likes*, mientras que este porcentaje es del 70 % en su cuenta personal.
- (1,3 puntos) Una clínica estética se ha puesto en contacto con ella para ofrecerle una promoción por el porcentaje de sus publicaciones que obtienen más de 100 *likes*. Determine cual es dicho porcentaje.
 - (1,2 puntos) Obtenga la probabilidad de que una publicación que no haya recibido más de 100 *likes* hubiera sido publicada en su cuenta personal.

Solución:

- a) Tenemos: $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = 0,9$
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \implies P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,9 = 0,5 + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \implies 0,4 = \frac{2}{3}P(B) \implies P(B) = 0,6$
 - $P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B) = 0,2$
 $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$
 - $P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 \neq 0,2 = P(A \cap B) \implies A$ y B no son independientes.
Como $P(A \cap B) = 0,2 \neq 0 \implies A$ y B tienen intersección no vacía y no son incompatibles.
- b) Sean P utiliza su cuenta personal, C utiliza su cuenta de la marca comercial, M recibe más de 100 *likes* y $\bar{M}$ recibe menos de 100 *likes*.

$$\text{b.1. } P(M) = P(M|P)P(P) + P(M|C)P(C) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,54 = 54\%$$

$$\text{b.2. } P(P|\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}|P)P(P)}{P(\overline{M})} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{1 - 0,54} \simeq 0,1304$$



EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b).

Problema 4 La cosmética natural se sitúa como un segmento relevante y en expansión en el mercado cosmético español. Una investigación realizada por Susana sugiere que el 83 % de los clientes de una plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos, manifiestan preferencia por productos de cosmética natural.

a) (2,5 puntos)

- a.1. (1,2 puntos) Determine el número mínimo de clientes de la plataforma que Susana debería seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar esta proporción, de manera que, con un nivel de confianza del 98,8 %, el margen de error en la estimación no supere el 4 %.
- a.2. (1,3 puntos) Se selecciona una muestra aleatoria de 100 clientes de la plataforma de comercio electrónico para estudiar sus hábitos de compra. Asumiendo que la proporción poblacional es $p = 0,8$, y utilizando la aproximación por la distribución normal, calcule la probabilidad de que al menos el 70 %, pero menos de $3/4$ de los clientes seleccionados en dicha muestra tengan preferencia en sus compras por productos de cosmética natural.

b) (2,5 puntos) La plataforma de comercio electrónico especializada en productos cosméticos que ha investigado Susana sabe que el gasto anual de sus clientes se puede aproximar por una distribución normal de media μ euros y desviación típica $\sigma = 25$ euros.

- b.1. (1,3 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 clientes de la plataforma resultando ser su gasto medio mensual de 310 euros. Obtenga un intervalo de confianza para estimar el gasto medio de todos los clientes con un nivel de confianza del 99,4 %.
- b.2. (1,2 puntos) Suponiendo que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 300$ euros, calcule la probabilidad de que, elegido al azar un cliente de la plataforma, su gasto mensual este comprendido entre 260 y 330 euros (ambos incluidos).

Solución:

a) a.1. $\hat{p} = 0,83$, $E = 0,04$ y $NC = 98,8\%$:

$$1 - \alpha = 0,988 \Rightarrow \alpha = 0,012 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,006$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,006 = 0,994 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,51$$

$$E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow 0,04 = 2,51 \sqrt{\frac{0,83 \cdot 0,17}{n}} \Rightarrow n \geq 555,59 \Rightarrow n = 556$$

a.2. $p = 0,8$, $n = 100 > 30$, $np = 80 > 5$ y $nq = 20 > 5 \Rightarrow B(100; 0,8) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(80; 4)$
 $0,7 \cdot 100 = 70$ y $\frac{3}{4} \cdot 100 = 75$:

$$P(70 \leq X < 75) = P\left(\frac{69,5 - 80}{4} \leq Z \leq \frac{74,5 - 80}{4}\right) = P(-2,63 \leq Z \leq -1,38) =$$

$$P(Z \leq -1,38) - P(Z \leq -2,63) = P(Z \leq 2,63) - P(Z \leq 1,38) = 0,9957 - 0,9162 = 0,0795$$

b) $N(\mu, 25)$

b.1. $n = 81$, $\bar{X} = 310$, $NC = 99,4\%$.

$$1 - \alpha = 0,994 \Rightarrow \alpha = 0,006 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,003$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,003 = 0,997 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,75$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,75 \frac{25}{\sqrt{81}} = 7,6389$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (310 - 7,6389; 310 + 7,6389) = (302,3611; 317,6389)$$

b.2. $N(300, 25)$

$$P(260 \leq X < 330) = P\left(\frac{260 - 300}{25} \leq Z \leq \frac{330 - 300}{25}\right) = P(-1,6 \leq Z \leq 1,2) =$$

$$P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq -1,6) = P(Z \leq 1,2) - (1 - P(Z \leq 1,6)) = 0,8849 - (1 - 0,9452) = 0,8310$$