

Modelo 5 de 2002

Integrales, derivabilidad, sistemas matriciales, rectas y asíntotas.

Opción A - Ejercicio 1

El denominador se factoriza como $(x+3)(x-1)$. Dividimos y descomponemos la fracción:

$$\frac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3} = 2 + \frac{6x + 6}{(x+3)(x-1)} = 2 + \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-1}.$$

Integramos término a término. Como el dominio excluye $x = -3$ y $x = 1$, usamos valores absolutos en los logaritmos:

$$F(x) = 2x + 3 \ln |x+3| + 3 \ln |x-1| + C.$$

Opción A - Ejercicio 2

Para la continuidad en 0, el valor de la rama izquierda debe coincidir con el límite de la derecha. Así, $b = 1$. Las derivadas laterales son

$$f'_-(0) = 3a, \quad f'_+(0) = e^{x(ax+b)}(2ax+b) \Big|_{x=0} = b = 1.$$

La igualdad de derivadas exige $3a = 1$. Por tanto, $a = 1/3, b = 1$. **Opción A - Ejercicio 3**

El determinante de A es

$$\det A = (m-1)(2m+3),$$

por lo que A es invertible para $m \neq 1, -3/2$. Para $m = 2$, el determinante vale 7, así que el sistema tiene una solución única. La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Restando la primera fila de la segunda y eliminando la primera incógnita de la tercera se obtiene

$$2y - 3z = -1, \quad 7y - 7z = -4.$$

De aquí $z = -1/7, y = -5/7$, y al sustituir en la primera ecuación, $x = 5/7$. Luego

$$X = \left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{1}{7} \right)^t.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta buscada pasa por $P = (1, 2, 3)$, el punto de la recta más cercano al origen. Por ello su vector director d debe ser perpendicular a $OP = P$. Para que no corte al plano $x - y + z = 7$, debe ser paralela a él y, por tanto, perpendicular a su normal $n = (1, -1, 1)$. Un vector perpendicular a ambos se obtiene mediante el producto vectorial:

$$d = n \times P = (-5, -2, 3), \quad d \cdot P = 0, \quad d \cdot n = 0.$$

Además, P no pertenece al plano, pues $1 - 2 + 3 = 2 \neq 7$. La recta queda, en forma paramétrica,

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(-5, -2, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La recta $r: 2x + y = 6$ tiene pendiente -2 . Para que sea tangente, busquemos puntos donde $f'(x) = -2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 5, \quad f'(x) = -2 \implies (3x - 7)(x - 1) = 0.$$

Las candidatas son $x = 1$ y $x = 7/3$. La recta tangente en $x = 1$ pasa por $(1, f(1)) = (1, 4)$, que pertenece a r ; en $x = 7/3$ la gráfica no pasa por r . Por tanto, la tangencia ocurre en $(1, 4)$. Para que r sea normal, el punto debe pertenecer a r y la pendiente tangente debe ser $1/2$ (la recíproca opuesta de -2). Las intersecciones de la curva con r satisfacen

$$f(x) = 6 - 2x \implies (x - 3)(x - 1)^2 = 0.$$

En esos puntos, $f'(1) = -2$ y $f'(3) = 2$, ninguno igual a $1/2$. No existe un punto en que r sea la normal. **Opción B - Ejercicio 2**

La división de polinomios da

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{7x + 6}{(x - 3)(x + 1)}.$$

El denominador se anula en $x = -1, 3$ y el numerador no se anula allí; ambas son asíntotas verticales. Como el término restante tiende a cero en los dos infinitos, la asíntota oblicua es $y = x + 2$. Una asíntota vertical no puede cortar la gráfica porque esos valores no pertenecen al dominio. Para ver si la oblicua la corta, igualamos la función y la recta:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{7x + 6}{(x - 3)(x + 1)} = 0 \implies x = -\frac{6}{7}.$$

El punto de corte es $(-6/7, 8/7)$. **Opción B - Ejercicio 3**

Con $A = (1, 2, -1)^t$ y $B = (1, 4, 3)$, sus productos son

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad BA = 6.$$

Por tanto,

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad (BA)^t = 6.$$

De la ecuación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$ despejamos $X = 2(C - (AB)^t)$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & -20 & 14 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Parametrizamos la primera recta como $(x, y, z) = (t + 2, t, 2t + 1)$. Para que el punto esté también en la segunda recta, las dos expresiones deben valer a :

$$a = x - 2y - z = 1 - 3t, \quad a = 2x + z = 4t + 5.$$

Igualando, $1 - 3t = 4t + 5$, luego $t = -4/7$ y $a = 19/7$. Sustituyendo en la recta r , el punto de intersección es

$$\left(\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$