

Junio de 2023 · Convocatoria ordinaria

El examen propone ocho problemas y pide escoger cuatro. Aquí se resuelven los ocho, explicando primero qué herramienta usamos y después cómo se aplica a los datos.

Problema 1. Ecuación matricial con parámetro

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

La ecuación es $A^2 X = B$. Para decidir si tiene solución, aplicamos Rouché-Frobenius a la matriz de coeficientes A^2 : hay solución si sus rangos y los de la ampliada coinciden; si además el rango es 3, la solución es única.

Calculamos el determinante de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(0 - 3) = -3 \neq 0.$$

Este resultado no depende de m . Por tanto, A es invertible para todo m , y

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-3)^2 = 9 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A^2) = 3$. La ampliada $(A^2|B)$ también tiene rango 3, pues contiene una submatriz A^2 de rango 3 y solo hay tres filas. Por Rouché-Frobenius, para todo $m \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado (SCD): siempre hay una única solución.

Para encontrarla, desarrollamos primero la potencia:

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $A^2 X = B$ equivale, por filas, a

$$\begin{cases} x + (2m+2)y + 2z = m, \\ (m^2+3)y + mz = 0, \\ 3my + 3z = 9. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $my + z = 3$, así que $z = 3 - my$. Sustituimos en la segunda:

$$(m^2+3)y + m(3 - my) = 0 \implies 3y + 3m = 0 \implies y = -m.$$

Entonces

$$z = 3 - m(-m) = 3 + m^2.$$

Por último, sustituimos $y = -m$ y $z = 3 + m^2$ en la primera:

$$x - (2m+2)m + 2(3 + m^2) = m \implies x - 2m + 6 = m \implies x = 3m - 6.$$

La solución, válida para todo valor real de m , es

$$X = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Operaciones con matrices y potencias

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Cálculo de $(AB^T + I)^{-1}$. Como A y B son 2×3 , B^T es 3×2 , de modo que AB^T e I son matrices 2×2 . Calculamos el producto primero:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sumamos la identidad I_2 :

$$AB^T + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para invertir una matriz 2×2 , dividimos su adjunta por su determinante. Aquí

$$\det(AB^T + I_2) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 \neq 0,$$

$$(AB^T + I_2)^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Comprobación de $C^2 = -\alpha^3 I$ y cálculo de C^{13} . Multiplicamos C por sí misma:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 I_2.$$

La siguiente potencia confirma el patrón:

$$C^3 = C^2 C = -\alpha^3 C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^4 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribimos $13 = 2 \cdot 6 + 1$. Usando la igualdad ya comprobada,

$$C^{13} = (C^2)^6 C = (-\alpha^3)^6 C = \alpha^{18} C.$$

Por tanto,

$$C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Recta, paralelismo y plano perpendicular

La recta r está dada como intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

Sus normales son $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, 1)$. El vector director de la recta es perpendicular a ambos; lo obtenemos con el producto vectorial:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 3).$$

Para escribir r en forma paramétrica, tomamos $y = 0$. Las ecuaciones dan $x = 1$, $z = -1$, así que

$$r : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(-1, -1, 3), t \in \mathbb{R}.$$

Los puntos son $P = (0, 0, 3)$ y $Q = (2, 2, \alpha)$. La recta que los une tiene como dirección

$$\vec{PQ} = Q - P = (2, 2, \alpha - 3).$$

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son proporcionales. Igualamos:

$$(2, 2, \alpha - 3) = k(-1, -1, 3).$$

De las dos primeras coordenadas, $k = -2$. La tercera exige $\alpha - 3 = 3(-2) = -6$, de donde

$$\alpha = -3.$$

Con ese valor, $\vec{PQ} = (2, 2, -6) = -2\vec{d}_r$. Las rectas son paralelas y distintas, pues P no pertenece a r : en P , $x - y = 0 \neq 1$.

Para construir un plano perpendicular a r , usamos $\vec{d}_r$ como vector normal del plano. La ecuación general de un plano de normal (A, B, C) que pasa por P_0 es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Sustituimos $\vec{d}_r = (-1, -1, 3)$ y $P = (0, 0, 3)$:

$$-(x - 0) - (y - 0) + 3(z - 3) = 0 \implies \boxed{x + y - 3z + 9 = 0.}$$

Problema 4. Rectas, ángulo y proyección ortogonal

La recta r viene dada por

$$r : \begin{cases} 5x + y + 7z = 16, \\ 9x - y + 7z = 12. \end{cases}$$

Comprobamos el punto $Q = (2, 6, 0)$ sustituyendo sus coordenadas:

$$5(2) + 6 + 7(0) = 16, \quad 9(2) - 6 + 7(0) = 12.$$

Cumple las dos ecuaciones, así que $Q \in r$.

Los normales de los planos que definen r son $(5, 1, 7)$ y $(9, -1, 7)$. Su producto vectorial da un vector director:

$$\vec{d}_r = (5, 1, 7) \times (9, -1, 7) = (14, 28, -14) = 14(1, 2, -1).$$

Elegimos $\vec{d}_r = (1, 2, -1)$. La recta r , en forma paramétrica, es

$$\boxed{r : (x, y, z) = (2, 6, 0) + t(1, 2, -1), \quad t \in \mathbb{R}.}$$

El vector director de la recta s , que pasa por $P = (0, 5, 2)$ y $Q = (2, 6, 0)$, es

$$\vec{d}_s = Q - P = (2, 1, -2),$$

y por tanto

$$\boxed{s : (x, y, z) = (0, 5, 2) + u(2, 1, -2), \quad u \in \mathbb{R}.}$$

El ángulo agudo entre dos rectas se calcula con el valor absoluto del producto escalar de sus directores:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{d}_s\|}.$$

Sustituimos:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1)(-2) = 6, \quad \|\vec{d}_r\| = \sqrt{6}, \quad \|\vec{d}_s\| = 3.$$

Así,

$$\cos \theta = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35.26^\circ.}$$

Para proyectar P ortogonalmente sobre r , escribimos el pie $H = Q + t\vec{d}_r$ e imponemos que $P - H$ sea perpendicular a $\vec{d}_r$. Esto equivale a

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{d}_r}{\|\vec{d}_r\|^2} = \frac{(-2, -1, 2) \cdot (1, 2, -1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{H = Q - \vec{d}_r = (2, 6, 0) - (1, 2, -1) = (1, 4, 1).}$$

Problema 5. Estudio de una función y área

La función es

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1).$$

a) Dominio y asíntotas. Para que exista el logaritmo se necesita $x + 1 > 0$, es decir, $x > -1$. Además, el denominador x no puede ser cero. Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Comprobamos las asíntotas verticales mediante los límites laterales. En $x = -1$, el logaritmo tiende a $-\infty$ y $1/x$ permanece finito:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty,$$

así que $x = -1$ es asíntota vertical. En $x = 0$, $\ln(x + 1) \rightarrow 0$, mientras que $1/x$ tiende a infinitos con signos opuestos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Luego $x = 0$ también es una asíntota vertical.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = 1/x + \ln(x + 1) \rightarrow +\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal. Para comprobar una posible oblicua calculamos la pendiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x + 1)}{x} \right) = 0.$$

Una asíntota de pendiente cero sería horizontal, pero $f(x) \rightarrow +\infty$, no a un valor finito. Por tanto, no hay asíntota oblicua; las únicas asíntotas son $x = -1$ y $x = 0$.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos. Derivamos y reducimos a una sola fracción:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2(x+1)}.$$

El denominador es positivo en el dominio, porque $x^2 > 0$ y $x + 1 > 0$. Buscamos los ceros del numerador:

$$\alpha_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.6180, \quad \alpha_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$$

Ambos pertenecen al dominio. Estudiamos el signo de f' en cada intervalo; los puntos $x = -1$ y $x = 0$ se excluyen del dominio:

Intervalo	Valor de prueba en $x^2 - x - 1$	Signo de $f'(x)$	Comportamiento
$(-1, \alpha_-)$	$x = -0.8 : 0.44$	+	Creciente
$(\alpha_-, 0)$	$x = -\frac{1}{2} : -0.25$	-	Decreciente
$(0, \alpha_+)$	$x = 1 : -1$	-	Decreciente
$(\alpha_+, +\infty)$	$x = 2 : 1$	+	Creciente

En α_- la derivada cambia de + a -, así que hay un máximo relativo; en α_+ cambia de - a +, así que hay un mínimo relativo. Para expresar sus ordenadas usamos que, en una raíz de $x^2 - x - 1 = 0$, se cumple $1/x = x - 1$ y $x + 1 = x^2$:

$$f(\alpha_{\pm}) = \frac{1}{\alpha_{\pm}} + \ln(\alpha_{\pm} + 1) = \alpha_{\pm} - 1 + 2 \ln |\alpha_{\pm}|.$$

$$\text{Máximo relativo: } \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -2.5805 \right), \quad \text{mínimo relativo: } \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1.5805 \right).$$

Los puntos -1 y 0 no pertenecen al dominio; son asíntotas, no extremos.

c) Área entre la curva y el eje x , de $x = 1$ a $x = 2$. En ese intervalo $1/x > 0$ y $\ln(x + 1) > 0$, así que $f(x) > 0$ y el área es la integral de f . Integramos los dos sumandos. Para $\ln(x + 1)$ usamos integración por partes, $u = \ln(x + 1)$, $dv = dx$:

$$\int \ln(x + 1) dx = x \ln(x + 1) - \int \frac{x}{x + 1} dx = (x + 1) \ln(x + 1) - x + C.$$

Por tanto, para $x > 0$ una primitiva es

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} + \ln(x + 1) \right) dx = \ln x + (x + 1) \ln(x + 1) - x + C.$$

Evaluamos en los límites 1 y 2:

$$S = \int_1^2 f(x) dx = [\ln x + (x+1) \ln(x+1) - x]_{x=1}^{x=2}$$

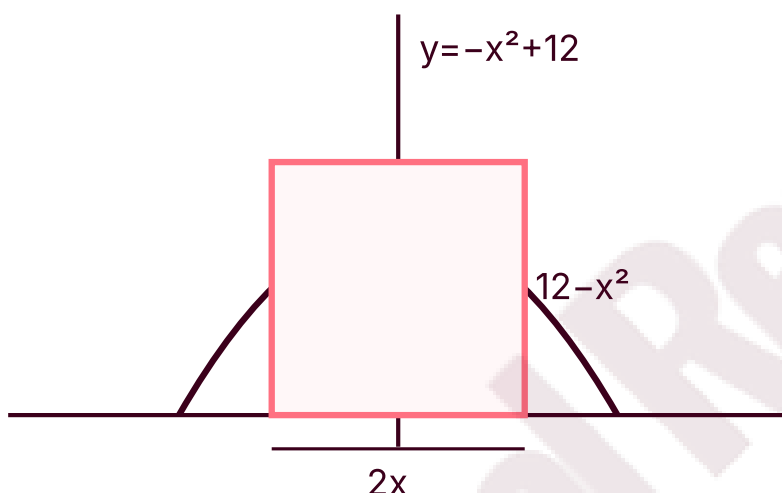
$$S = (\ln 2 + 3 \ln 3 - 2) - (2 \ln 2 - 1) = \boxed{3 \ln 3 - \ln 2 - 1 \approx 1.6027 \text{ unidades cuadradas.}}$$

Problema 6. Puerta rectangular de área máxima

La entrada sigue la parábola $y = -x^2 + 12$, y el suelo es $y = 0$. La parábola es simétrica respecto del eje y ; por ello, para que las dos esquinas superiores estén a la misma altura, la puerta debe quedar centrada. Llamemos $x \geq 0$ a la mitad de su anchura. Sus esquinas superiores tienen abscisas $-x$ y x , así que

$$\text{anchura} = 2x, \text{ altura} = 12 - x^2.$$

Los puntos donde la parábola toca el suelo verifican $-x^2 + 12 = 0$, de donde $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.



El área es base por altura:

$$S(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3.$$

El dominio geométrico es $[0, 2\sqrt{3}]$. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$S'(x) = 24 - 6x^2 = 6(4 - x^2) = 0 \implies x = 2 \text{ o } x = -2.$$

Solo $x = 2$ pertenece al dominio. Probamos el signo de la derivada en cada intervalo:

Intervalo	Prueba en $S'(x)$	Signo	Comportamiento
$(0, 2)$	$x = 1 : 24 - 6 = 18$	+	Creciente
$(2, 2\sqrt{3})$	$x = 3 : 24 - 54 = -30$	-	Decreciente

Además, $S(0) = S(2\sqrt{3}) = 0$, así que el cambio de creciente a decreciente confirma que $x = 2$ da el máximo absoluto. Las dimensiones son

$$\boxed{\text{anchura} = 2(2) = 4 \text{ m, altura} = 12 - 2^2 = 8 \text{ m.}}$$

b) Áreas de la puerta y de la entrada de piedra. La puerta tiene área

$$S_{\text{puerta}} = 4 \cdot 8 = \boxed{32 \text{ m}^2}.$$

La entrada completa llega desde $x = -2\sqrt{3}$ hasta $x = 2\sqrt{3}$. Integramos la altura de la parábola sobre el suelo:

$$S_{\text{entrada}} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2) dx = \left[12x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-2\sqrt{3}}^{x=2\sqrt{3}}.$$

En los extremos, $12(2\sqrt{3}) - (2\sqrt{3})^3/3 = 24\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, y el valor en $-2\sqrt{3}$ es $-16\sqrt{3}$. Por tanto,

$$S_{\text{entrada}} = 16\sqrt{3} - (-16\sqrt{3}) = \boxed{32\sqrt{3} \text{ m}^2}.$$

La parte recubierta de piedra es el área total menos la puerta:

$$S_{\text{piedra}} = 32\sqrt{3} - 32 = 32(\sqrt{3} - 1) \text{ m}^2 \approx 23.4256 \text{ m}^2.$$

Problema 7. Dos monedas y una segunda ronda

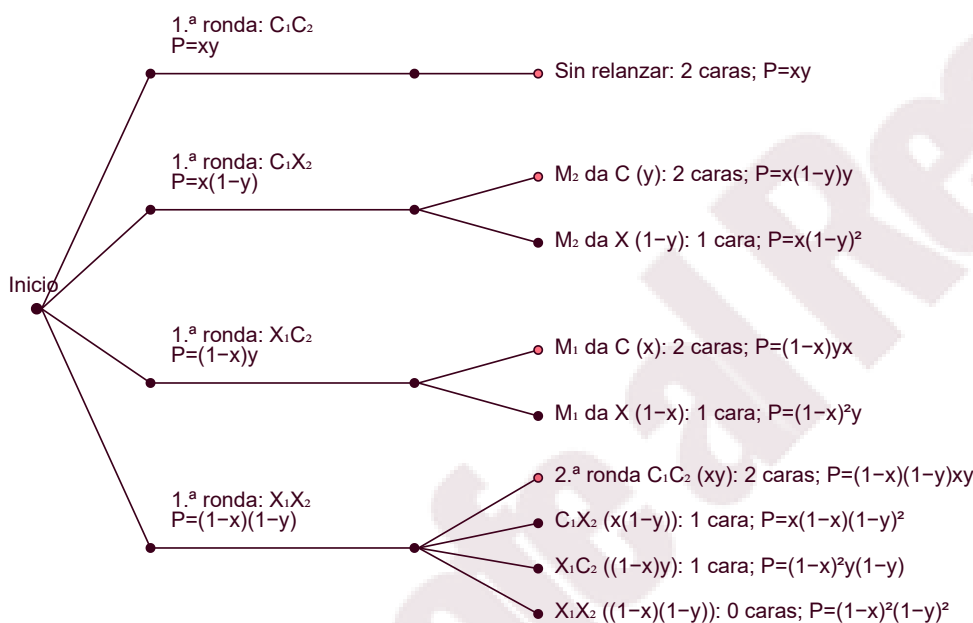
Llamamos C a cara y X a cruz. La moneda M_1 da cara con probabilidad x , y la moneda M_2 con probabilidad y . Por tanto, sus probabilidades de cruz son $1 - x$ y $1 - y$. Los lanzamientos de monedas distintas son independientes: la probabilidad de una ruta se obtiene multiplicando las probabilidades de sus ramas.

a) Resultado del primer lanzamiento de las dos monedas.

$$\begin{aligned} P(\text{ninguna cara}) &= P(X_1 X_2) = (1 - x)(1 - y), \\ P(\text{solo una cara}) &= P(C_1 X_2) + P(X_1 C_2) \\ &= x(1 - y) + (1 - x)y, \\ P(\text{dos caras}) &= P(C_1 C_2) = xy. \end{aligned}$$

Son tres casos incompatibles y cubren todas las posibilidades; sus probabilidades suman 1.

b) Se vuelven a lanzar únicamente las monedas que dieron cruz. En palabras sencillas: una moneda deja de lanzarse en cuanto sale cara; solo se repiten las que todavía muestran cruz. El árbol muestra cada ruta final. Las etiquetas están al final de cada rama para distinguir con claridad a qué recorrido y a qué probabilidad corresponde cada línea.



Sumamos las probabilidades de las rutas que terminan con el mismo número de caras. Para que no haya ninguna, primero deben salir dos cruces y después repetirse dos cruces:

$$P(0 \text{ caras}) = (1 - x)(1 - y)(1 - x)(1 - y) = (1 - x)^2(1 - y)^2.$$

Para terminar con dos caras, las rutas posibles son $C_1 C_2$; $C_1 X_2$ seguido de cara de M_2 ; $X_1 C_2$ seguido de cara de M_1 ; y $X_1 X_2$ seguido de dos caras:

$$\begin{aligned} P(2 \text{ caras}) &= xy + x(1 - y)y + (1 - x)yx + (1 - x)(1 - y)xy \\ &= xy [1 + (1 - y) + (1 - x) + (1 - x)(1 - y)] \\ &= xy(2 - x)(2 - y). \end{aligned}$$

Las tres categorías finales son incompatibles y suman 1. Por tanto,

$$P(1 \text{ cara}) = 1 - (1 - x)^2(1 - y)^2 - xy(2 - x)(2 - y).$$

Problema 8. Probabilidad de retraso y procedencia del vuelo

Elegimos al azar uno de los 161 vuelos. Definimos N : procede del territorio nacional; U : procede de la Unión Europea; R : procede de fuera de la Unión Europea; D : se retrasa. Las tres procedencias cubren todos los vuelos y no se solapan:

$$P(N) = \frac{95}{161}, P(U) = \frac{50}{161}, P(R) = \frac{16}{161}.$$

Las probabilidades condicionadas de retraso son $P(D|N) = 0.05 = 1/20$, $P(D|U) = 0.04 = 1/25$ y $P(D|R) = 0.0625 = 1/16$.



a) Probabilidad de que un vuelo se retrase. Sumamos las probabilidades de las tres rutas que terminan en retraso (regla de la probabilidad total):

$$\begin{aligned} P(D) &= P(N)P(D|N) + P(U)P(D|U) + P(R)P(D|R) \\ &= \frac{95}{161} \cdot \frac{1}{20} + \frac{50}{161} \cdot \frac{1}{25} + \frac{16}{161} \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{19}{644} + \frac{2}{161} + \frac{1}{161} = \boxed{\frac{31}{644} \approx 0.0481.} \end{aligned}$$

b) Probabilidad de que un vuelo retrasado proceda de la Unión Europea. Aplicamos Bayes: dividimos la probabilidad de que sea europeo y se retrase entre la probabilidad total de retraso:

$$P(U|D) = \frac{P(U)P(D|U)}{P(D)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot \frac{1}{25}}{\frac{31}{644}} = \frac{2/161}{31/644} = \boxed{\frac{8}{31} \approx 0.2581.}$$