

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Escribimos $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ exige $f''(\frac{1}{2}) = 0$. Además, la tangente en $x = 0$ es $y = 5 - 6x$, cuyo valor en 0 y cuya pendiente dan $f(0) = 5$ y $f'(0) = -6$. Como

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a,$$

las condiciones determinan

$$3 + 2a = 0 \implies a = -\frac{3}{2}, \quad b = -6, \quad c = 5.$$

Por tanto,

$$\boxed{a = -\frac{3}{2}, \quad b = -6, \quad c = 5}.$$

Para el caso $a = 3, b = -9, c = 8$, la función es $x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. Buscamos los extremos resolviendo $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1),$$

por lo que los puntos críticos son $x = -3$ y $x = 1$. La segunda derivada es $f''(x) = 6x + 6$: en -3 es negativa y en 1 positiva. Así, hay un máximo en $x = -3$ y un mínimo en $x = 1$. Sus valores son

$$f(-3) = 35, \quad f(1) = 3.$$

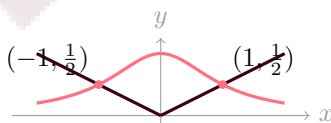
Los extremos relativos son $\boxed{(-3, 35) \text{ máximo}, (1, 3) \text{ mínimo}}.$

Opción A - Ejercicio 2

Las funciones son $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ambas son pares. Para hallar los cortes resolvemos, con $t = |x| \geq 0$,

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{1+t^2} \iff t^3 + t - 2 = 0 \iff (t-1)(t^2 + t + 2) = 0.$$

La única raíz no negativa es $t = 1$, así que las intersecciones son $(-1, \frac{1}{2})$ y $(1, \frac{1}{2})$. En $[-1, 1]$, la gráfica de g queda por encima de la de f ; fuera de ese intervalo no se forma un recinto cerrado entre ellas. El esbozo muestra las dos curvas y la región limitada:



b) Por simetría, el área total es dos veces la comprendida entre las gráficas en $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= 2 \left[\arctan x - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi - 1}{2}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

La primera y la segunda ecuación del sistema son

$$E_1 : x + 2y - 3z = 3, \quad E_2 : 2x + 3y + z = 5.$$

Para que la tercera ecuación no restrinja más el conjunto de soluciones, debe ser una combinación lineal de estas dos, incluidos sus términos independientes. Calculamos

$$2E_1 - E_2 : quad(2x + 4y - 6z) - (2x + 3y + z) = 6 - 5,$$

que se reduce a $y - 7z = 1$. Comparando con $\alpha x + y - 7z = 1$, resulta $\boxed{\alpha = 0}$.

b) Añadimos la condición $x + y + z = 4$ al sistema. Resolvemos

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3, \\ 2x + 3y + z = 5, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $x = 4 - y - z$. Al sustituir en las dos primeras obtenemos $y - 4z = -1$ y $y - z = -3$. Restando estas relaciones, $3z = -2$, de donde

$$z = -\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{11}{3}, \quad x = \frac{25}{3}.$$

La solución pedida es $\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{25}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$.

Opción A - Ejercicio 4

El vector director de r se obtiene restando las coordenadas de sus puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1 - 1, 1 - 0, 0 + 1) = (-2, 1, 1).$$

a) La recta paralela que pasa por $C = (-2, 3, 2)$ conserva ese vector director. En forma paramétrica,

$$s : \begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Para dos rectas paralelas, la distancia es la longitud de la componente perpendicular que separa dos puntos de ellas. Podemos calcularla con

$$d(r, s) = \frac{\|(C - A) \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Como $C - A = (-3, 3, 3)$,

$$(C - A) \times \overrightarrow{AB} = (0, -3, 3), \quad d(r, s) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea r el radio de la base y h la altura del cilindro, en metros. Al ser un depósito sin tapa, la superficie es $S = \pi r^2 + 2\pi r h$. La capacidad fija establece

$$\pi r^2 h = 125 \implies h = \frac{125}{\pi r^2}, \quad r > 0.$$

Así, debemos minimizar

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{250}{r}.$$

Derivando y resolviendo $S'(r) = 0$,

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = 0 \implies r^3 = \frac{125}{\pi} \implies r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m.}$$

La segunda derivada $S''(r) = 2\pi + 500/r^3$ es positiva, por lo que este radio da el mínimo. La altura correspondiente es

$$h = \frac{125}{\pi \left(25/\sqrt[3]{\pi^2}\right)} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m.}$$

Las dimensiones son $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m}, \quad h = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m}.$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos $f(x) = x \ln(x+1)$ por partes, tomando $u = \ln(x+1)$ y $dv = x dx$. Entonces $du = \frac{dx}{x+1}$ y $v = x^2/2$:

$$\begin{aligned} \int x \ln(x+1) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C. \end{aligned}$$

La condición $F(1) = 0$ da

$$0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C \implies C = -\frac{1}{4}.$$

Por tanto,

$$F(x) = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \quad x > -1.$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Tomamos determinantes en la igualdad $X^2AX = B$. Por la multiplicatividad del determinante,

$$\det(X^2AX) = \det(X)^2 \det(A) \det(X) = \det(X)^3 \det(A).$$

Calculamos los determinantes:

$$\det A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1, \quad \det B = -3 + 3 + 1 = 1.$$

Así,

$$-\det(X)^3 = 1 \implies \boxed{\det X = -1}.$$

b) Como $\det A = -1 \neq 0$, podemos despejar Y de $A^2YB^{-1} = A$. Multiplicamos por A^{-2} a la izquierda y por B a la derecha:

$$Y = A^{-2}AB = A^{-1}B.$$

La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r es la intersección de los planos con normales $(1, 2, -1)$ y $(2, -1, 1)$. Su vector director es el producto vectorial de esos normales:

$$\vec{d} = (1, 2, -1) \times (2, -1, 1) = (1, -3, -5).$$

El punto $R = (1, 1, 0)$ pertenece a ambos planos, así que r pasa por R con director $\vec{d}$.

a) Un plano que contiene a r y pasa por el origen contiene los vectores R y $\vec{d}$. Un vector normal se obtiene con su producto vectorial:

$$R \times \vec{d} = (-5, 5, -4).$$

Al pasar por el origen, su término independiente es cero. La ecuación general del plano es

$$\boxed{5x - 5y + 4z = 0}.$$

b) Para que el plano corte perpendicularmente a r , su vector normal debe ser paralelo al vector director $\vec{d}$. Además, debe pasar por $(1, 1, 0)$; por tanto,

$$(1, -3, -5) \cdot (x - 1, y - 1, z) = 0 \implies \boxed{x - 3y - 5z + 2 = 0}.$$