

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Como la asíntota vertical está en $x = 1$, el denominador $x + c$ debe anularse allí; por tanto, $c = -1$. Para que sea una asíntota vertical y no una discontinuidad evitable, el numerador no puede anularse en $x = 1$. Dividiendo entre $x - 1$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x - 1} = ax + a + \frac{a + b}{x - 1}.$$

La pendiente de la asíntota oblicua es el coeficiente de x , así que $a = 2$. Derivamos esta expresión y usamos que hay un extremo local en $x = 3$:

$$f'(x) = 2 - \frac{2 + b}{(x - 1)^2}, \quad f'(3) = 0 \implies 2 - \frac{2 + b}{4} = 0 \implies b = 6.$$

El numerador en $x = 1$ vale $2 + 6 = 8 \neq 0$, de modo que la asíntota vertical es efectiva. La solución es

$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = -1.$$

Además, $f''(3) = 2 > 0$, por lo que el extremo en $x = 3$ es un mínimo local.

Opción A - Ejercicio 2

Integramos por partes, tomando $u = x^2$ y $dv = \sin x \, dx$. Entonces $du = 2x \, dx$ y $v = -\cos x$:

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x \, dx.$$

Aplicamos integración por partes de nuevo al segundo término:

$$2 \int_0^\pi x \cos x \, dx = 2 [x \sin x + \cos x]_0^\pi = -4.$$

El primer término vale π^2 , así que

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4.$$

Opción A - Ejercicio 3

a) Despejamos X de la ecuación matricial

$$A^t X B^{-1} = C.$$

Multiplicamos por $(A^t)^{-1}$ a la izquierda y por B a la derecha:

$$X = (A^t)^{-1} C B.$$

La matriz A es simétrica y

$$\det A = 1 - 4 = -3, \quad (A^t)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}}.$$

b) Como B es invertible,

$$\det(B^{-1}(C^t C)B) = \det(B^{-1}) \det(C^t C) \det(B) = \det(C^t C).$$

La matriz C tiene dos filas y tres columnas, así que $\text{rg}(C) \leq 2$. Por ello $C^t C$ es de orden 3 y tiene rango menor que 3; es singular. Concluimos que

$$\boxed{\det(B^{-1}(C^t C)B) = 0}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene punto $R_0 = (1, 1, -2)$ y vector director $\vec{u} = (0, 0, 1)$. La recta s se escribe en forma paramétrica a partir de $x - y = 1$ y $z = -1$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo que un punto es $S_0 = (1, 0, -1)$ y un vector director es $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

a) La dirección de una perpendicular común debe ser ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. El producto vectorial proporciona esa dirección:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 0).$$

Sean $P = (1, 1, \lambda - 2) \in r$ y $Q = (1 + t, t, -1) \in s$. Para que $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ sea perpendicular a ambas rectas, imponemos sus productos escalares con los dos vectores directores:

$$(Q - P) \cdot \vec{u} = 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1, \quad (Q - P) \cdot \vec{v} = 2t - 1 = 0 \implies t = \frac{1}{2}.$$

Así, $P = (1, 1, -1)$ y la perpendicular común, en forma paramétrica, es

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \mu, \\ y = 1 + \mu, \\ z = -1, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

b) Para dos rectas cruzadas, usando puntos R_0, S_0 y directores $\vec{u}, \vec{v}$, la distancia es

$$d(r, s) = \frac{|(S_0 - R_0) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Aquí $S_0 - R_0 = (0, -1, 1)$ y $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 0)$, así que

$$d(r, s) = \frac{|(0, -1, 1) \cdot (-1, 1, 0)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Llamamos x a la anchura del terreno, perpendicular al río, e y a su longitud, paralela al río. La superficie impone $xy = 180000$, y solo se valla tres lados, por lo que la longitud de valla es $L = 2x + y$. Despejamos y para expresar todo en función de una variable positiva:

$$y = \frac{180000}{x}, \quad L(x) = 2x + \frac{180000}{x}, \quad x > 0.$$

Buscamos el mínimo derivando:

$$L'(x) = 2 - \frac{180000}{x^2} = 0 \implies x^2 = 90000.$$

Como $x > 0$, $x = 300$ m y entonces $y = 180000/300 = 600$ m. Además, $L''(x) = 360000/x^3 > 0$, por lo que el punto crítico es un mínimo. Las dimensiones son

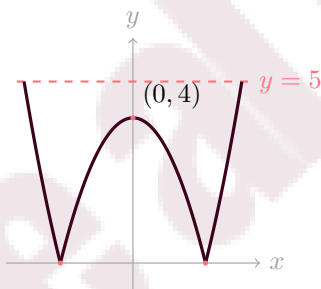
300 m perpendicular al río y 600 m a lo largo del río.

Opción B - Ejercicio 2

La función es par y puede escribirse por tramos:

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & |x| \geq 2, \\ 4 - x^2, & |x| < 2. \end{cases}$$

Su gráfica corta al eje X en $x = \pm 2$, tiene un máximo local en $(0, 4)$ y ramas parabólicas crecientes hacia $+\infty$ cuando $|x|$ crece. El siguiente esbozo recoge estas características y la recta $y = 5$:



b) La recta $y = 5$ corta las ramas exteriores cuando $x^2 - 4 = 5$, es decir, en $x = -3$ y $x = 3$. En el tramo central $[-2, 2]$ la gráfica es $4 - x^2$, que queda por debajo de 5; en los tramos exteriores, la gráfica $x^2 - 4$ también queda por debajo de 5 hasta los cortes. El área es, por simetría,

$$\mathcal{A} = 2 \left(\int_0^2 (5 - (4 - x^2)) dx + \int_2^3 (5 - (x^2 - 4)) dx \right).$$

Evaluamos por separado:

$$\int_0^2 (1 + x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{14}{3}, \quad \int_2^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{8}{3}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{A} = 2 \left(\frac{14}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{44}{3} \text{ u}^2.$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Para $\alpha = 1$, el sistema queda

$$2x + y = 0, \quad x - y - 3z = 1, \quad x + y + 2z = 0.$$

De la primera ecuación $y = -2x$. Sustituyendo en la tercera obtenemos $x = 2z$. Al introducirlo en la segunda,

$$3x - 3z = 1 \implies 3z = 1.$$

Así, $z = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{4}{3}$, por lo que

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

b) Sustituimos el vector propuesto $(1, -3, \alpha)$ en el sistema. La segunda y la tercera ecuaciones se cumplen para todo α ; la primera exige

$$2 - 3 + (\alpha - 1)\alpha = \alpha - 1 \iff \alpha(\alpha - 2) = 0.$$

Los candidatos son $\alpha = 0$ y $\alpha = 2$. Para que la solución sea única, la matriz de coeficientes debe tener determinante no nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & -\alpha & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha(\alpha - 4).$$

Con $\alpha = 0$ el determinante es cero, así que la solución no es única. Con $\alpha = 2$, el determinante vale $-4 \neq 0$ y la solución es única. Por tanto,

$$\alpha = 2.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta se da en forma simétrica:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}.$$

Tomando el valor común como parámetro t , la escribimos en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = nt, \\ z = 1 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto es $P_0 = (-1, 0, 1)$ y un vector director es $\vec{v} = (3, n, 2)$. El vector normal del plano π es $\vec{N} = (m, 5, 2)$.

a) Una recta es perpendicular a un plano cuando su vector director es paralelo al vector normal del plano. Igualamos sus componentes: $(3, n, 2) = k(m, 5, 2)$. La tercera componente da $k = 1$, así que

$$m = 3, \quad n = 5.$$

b) Para que r esté contenida en π , su vector director debe ser perpendicular a $\vec{N}$. Además, el punto P_0 debe pertenecer al plano. Aplicamos ambas condiciones:

$$(3, n, 2) \cdot (m, 5, 2) = 0 \implies 3m + 5n + 4 = 0,$$

$$m(-1) + 5(0) + 2(1) = 0 \implies m = 2.$$

Sustituyendo $m = 2$ en la primera, $6 + 5n + 4 = 0$, de donde $n = -2$. Por tanto,

$$m = 2, \quad n = -2.$$