

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

Sea x el número de pañuelos y y el de corbatas. Las restricciones de tiempo y del compromiso de producción son, respectivamente,

$$2x + 3y \leq 60, \quad y + 2x \geq 28, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

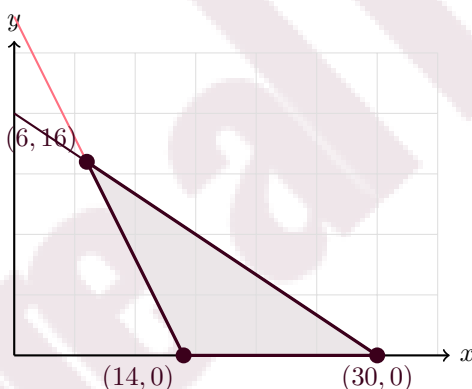
El beneficio total que queremos maximizar es $B(x, y) = 4x + 6y$. Para hallar el recinto factible, calculamos las intersecciones de sus rectas frontera. Con los ejes se obtienen $(14, 0)$ y $(30, 0)$; las dos rectas oblicuas se cortan en

$$\begin{cases} 2x + 3y = 60, \\ 2x + y = 28 \end{cases} \implies 2y = 32 \implies y = 16, \quad x = 6,$$

por lo que el tercer vértice es $(6, 16)$. Evaluamos el beneficio en los tres vértices:

$$B(14, 0) = 56, \quad B(30, 0) = 120, \quad B(6, 16) = 120.$$

Además, $B(x, y) = 2(2x + 3y)$, así que todos los puntos factibles de la recta $2x + 3y = 60$ alcanzan el máximo de 120 euros. El tramo factible de esa recta une $(6, 16)$ con $(30, 0)$. Si las prendas han de producirse en cantidades enteras, las combinaciones óptimas son $(x, y) = (6, 16), (9, 14), \dots, (30, 0)$, avanzando de tres en tres en x .



$B_{\max} = 120$ euros; cualquier punto del lado $2x + 3y = 60$ entre $(6, 16)$ y $(30, 0)$ es óptimo.

Ejercicio 2 · Derivadas y recta tangente

a) Para $f(x) = x \ln x$, el dominio es $x > 0$. Aplicamos la regla del producto:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

La función $g(x) = \frac{e^{3x}}{x^4 + 1}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, pues $x^4 + 1 > 0$. Aplicamos la regla del cociente:

$$g'(x) = \frac{3e^{3x}(x^4 + 1) - e^{3x} 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{e^{3x}(3x^4 - 4x^3 + 3)}{(x^4 + 1)^2}.$$

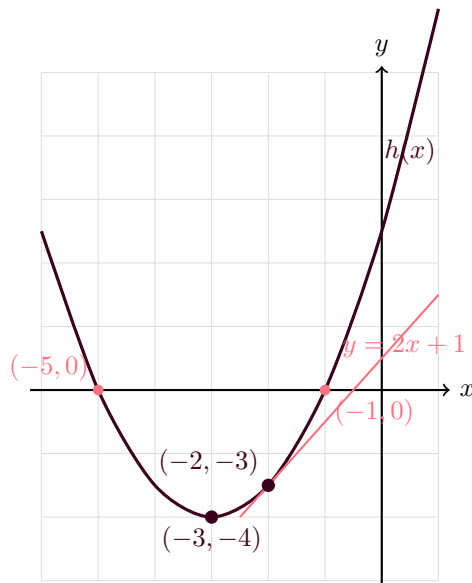
b) La función $h(x) = x^2 + 6x + 5$ es polinómica y, por tanto, está definida en todo $\mathbb{R}$. En $x = -2$ su ordenada y la pendiente de la tangente son

$$h(-2) = 4 - 12 + 5 = -3, \quad h'(x) = 2x + 6, \quad h'(-2) = 2.$$

La recta que pasa por $(-2, -3)$ con pendiente 2 cumple $y - y_0 = m(x - x_0)$; por ello,

$$y + 3 = 2(x + 2) \implies y = 2x + 1.$$

Para representarlas, escribimos $h(x) = (x + 3)^2 - 4$: su vértice es $(-3, -4)$ y corta al eje x en $(-5, 0)$ y $(-1, 0)$. La tangente toca la parábola en $(-2, -3)$.



$$f'(x) = \ln x + 1, \quad g'(x) = \frac{e^{3x}(3x^4 - 4x^3 + 3)}{(x^4 + 1)^2}, \quad t_{x=-2} : y = 2x + 1.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y probabilidad condicionada

Sean C el suceso «ser chico» y S el suceso «superar todas las asignaturas». Como las chicas representan el 52% del alumnado, la probabilidad total de superar se obtiene sumando las dos ramas posibles:

$$P(S) = P(C)P(S | C) + P(C^c)P(S | C^c) = 0,48 \cdot 0,85 + 0,52 \cdot 0,82 = 0,8344.$$

Para la probabilidad pedida en el apartado b), restringimos el espacio a quienes superan y calculamos qué parte de ellos son chicas:

$$P(C^c | S) = \frac{P(C^c \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C^c)P(S | C^c)}{P(S)} = \frac{0,52 \cdot 0,82}{0,8344} = \frac{533}{1043} \approx 0,511.$$

$$P(S) = 0,8344; \quad P(\text{chica} | S) = \frac{533}{1043} \approx 0,511.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para la media

La población sigue una distribución normal y se conoce su desviación típica, $\sigma = 3$ g. Para estimar la media mediante una muestra de tamaño n , usamos

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ fija el nivel de confianza y el segundo término es el error máximo. **a)** Con $\bar{x} = 60$, $n = 25$ y confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$. Así, el error es $1,96 \cdot 3/5 = 1,176$ g y

$$IC_{95\%}(\mu) = [60 - 1,176, 60 + 1,176] = [58,824, 61,176] \text{ g}.$$

b) Para confianza del 99%, $z_{0,995} \approx 2,576$. Queremos que $E = 2,576 \cdot 3/\sqrt{n} < 1$ g, luego

$$n > (2,576 \cdot 3)^2 = 59,721984.$$

Como el tamaño debe ser entero y cumplir la desigualdad estricta, el mínimo es $n = 60$.

$$IC_{95\%}(\mu) = [58,824, 61,176] \text{ g}; \quad n_{\min} = 60.$$

Opción B

Ejercicio 1 · Dimensiones y ecuación matricial

En el apartado a), A es 2×2 , B^t es 3×2 y C es 2×3 . Para que APB^t esté definido, P debe tener 2 filas y 3 columnas; el resultado será 2×2 . Para que QAC esté definido, Q debe tener 2 columnas. El producto final tendrá tantas filas como Q y 3 columnas; para que sea cuadrado, Q debe tener 3 filas. Por tanto, P es 2×3 y Q es 3×2 .

En el apartado b), la ecuación es $AX - 2BC^t = A^2$. Primero calculamos los productos conocidos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}, \quad BC^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aislamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$AX = A^2 + 2BC^t = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 37 & 38 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí,

$$X = A^{-1}(A^2 + 2BC^t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 37 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

La comprobación da $AX = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 37 & 38 \end{pmatrix}$, que coincide con $A^2 + 2BC^t$.

$$\dim(P) = 2 \times 3, \quad \dim(Q) = 3 \times 2, \quad X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Determinación de parámetros y asíntotas

La función es $f(x) = \frac{ax}{bx+1}$. Su dominio excluye los valores que anulan el denominador. Derivando mediante la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{a(bx+1) - abx}{(bx+1)^2} = \frac{a}{(bx+1)^2}.$$

La condición $f(-1) = 1$ da $\frac{-a}{1-b} = 1$, es decir, $a = b - 1$. En $x = 0$, la pendiente de la tangente es $f'(0) = a$; como la recta dada tiene pendiente 2, obtenemos $a = 2$ y, por tanto, $b = 3$. Se verifica que $f(-1) = 1$.

Para $a = b = 1$, queda $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, con dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Al acercarnos a $x = -1$, la función diverge y hay una asíntota vertical $x = -1$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1,$$

por lo que la asíntota horizontal es $y = 1$.

$$a = 2, \quad b = 3; \quad \text{para } a = b = 1 : x = -1 \text{ y } y = 1.$$

Ejercicio 3 · Operaciones con sucesos

a) Usamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, porque al sumar las dos probabilidades la intersección se cuenta dos veces. Despejando,

$$P(B) = 0,7 - 0,5 + 0,4 = 0,6.$$

b) Primero calculamos la intersección a partir de la fórmula de la unión: $P(C \cap D) = 0,4 + 0,3 - 0,5 = 0,2$. Por tanto,

$$P(C | D^c) = \frac{P(C \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0,4 - 0,2}{0,7} = \frac{2}{7}.$$

c) Al ser independientes, $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. Así, la probabilidad de que no ocurra ninguno es

$$P(E^c \cap F^c) = P(E^c)P(F^c) = (1 - 0,6)(1 - 0,8) = 0,08.$$

$$P(B) = 0,6; \quad P(C | D^c) = \frac{2}{7}; \quad P(E^c \cap F^c) = 0,08.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de jóvenes que usa la red es $\hat{p} = 410/500 = 0,82$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,18$. Para un intervalo bilateral de confianza de una proporción utilizamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

a) Con confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$. El error máximo es

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,82 \cdot 0,18}{500}} \approx 0,03366,$$

y el intervalo resulta

$$IC_{95\%}(p) = [0,82 - E, 0,82 + E] \approx [0,78634, 0,85366].$$

b) Para confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,170$. Manteniendo $\hat{p}$ y $\hat{q}$, imponemos $E < 0,04$:

$$2,170 \sqrt{\frac{0,82 \cdot 0,18}{n}} < 0,04 \implies n > \frac{2,170^2 \cdot 0,82 \cdot 0,18}{0,04^2} \approx 434,4.$$

El tamaño mínimo entero que garantiza el error inferior a 0,04 es 435.

$$IC_{95\%}(p) \approx [0,78634, 0,85366]; \quad n_{\min} = 435.$$