

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2023--2024 · Titular B

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuación matricial

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = -9 \neq 0$, podemos usar su inversa para despejar X . De $A^2X + A^4 = A$ obtenemos

$$A^2X = A - A^4 \implies X = A^{-2}(A - A^4) = A^{-1} - A^2.$$

Aquí hemos multiplicado por A^{-2} a la izquierda; las potencias de una misma matriz conmutan. Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

y, por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Maximización de audiencia

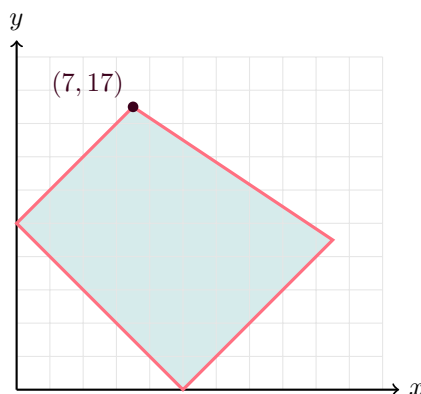
Sean x el número de anuncios de radio e y el de televisión. El presupuesto, la diferencia máxima entre cantidades y el mínimo total se expresan mediante

$$2x + 3y \leq 65, \quad -10 \leq x - y \leq 10, \quad x + y \geq 10, \quad x, y \geq 0.$$

La audiencia que queremos maximizar es $A(x, y) = 34000x + 72000y$. La región factible tiene vértices $(10, 0)$, $(19, 9)$, $(7, 17)$ y $(0, 10)$. Evaluamos la audiencia en cada uno:

(x, y)	$(10, 0)$	$(19, 9)$	$(7, 17)$	$(0, 10)$
$A(x, y)$	340000	1294000	1462000	720000

El máximo se alcanza en $(7, 17)$. Comprobamos que se agota el presupuesto: $2(7) + 3(17) = 65$, es decir, $2400(7) + 3600(17) = 78000$ euros; además, la diferencia entre cantidades es $17 - 7 = 10$ y se contratan 24 anuncios.



$x = 7$ anuncios de radio, $y = 17$ de televisión; $A_{\max} = 1462000$ personas.

Bloque B

Ejercicio 3 · Función racional

La función se puede escribir como

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x} = -2 + \frac{2}{x-2}.$$

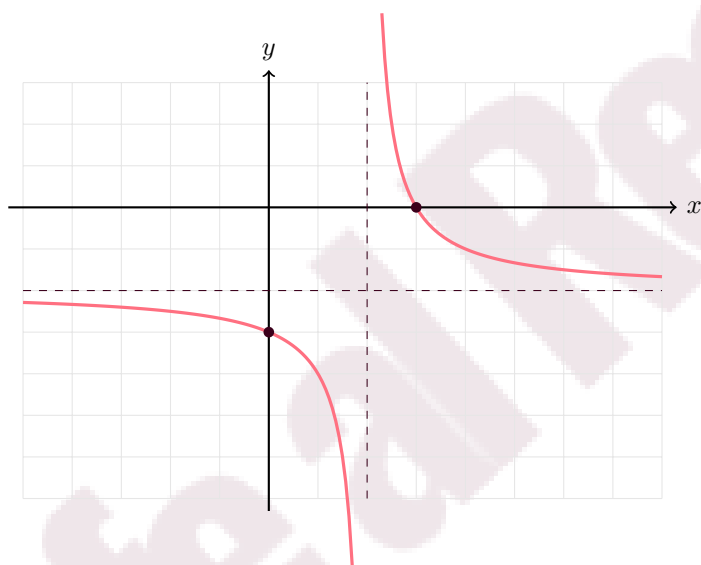
Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, pues el denominador se anula en $x = 2$. En cada intervalo de su dominio es una función racional continua y derivable. a) Al acercarnos a $x = 2$ por la izquierda, $2/(x-2) \rightarrow -\infty$; por la derecha, $2/(x-2) \rightarrow +\infty$. Así, $x = 2$ es asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $2/(x-2) \rightarrow 0$, por lo que $y = -2$ es asíntota horizontal.

b) El signo de la derivada permite estudiar la monotonía:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0 \quad (x \neq 2).$$

La función decrece en $(-\infty, 2)$ y en $(2, \infty)$; no tiene extremos relativos.

c) Para el corte con el eje X , resolvemos $f(x) = 0$, que da $x = 3$. Para el eje Y , evaluamos $f(0) = -3$. Los cortes son $(3, 0)$ y $(0, -3)$.



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $x = 2$, $y = -2$ son las asíntotas; decrece en ambos intervalos; $(3, 0)$, $(0, -3)$.

Ejercicio 4 · Continuidad, monotonía y área

La función está definida por polinomios en los dos tramos, así que su dominio es $\mathbb{R}$. El posible punto problemático es $x = 4$. En él,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -4^2 + 4(4) + 3 = 3, \quad f(4) = 2(4) - 5 = 3,$$

por lo que f es continua. Las derivadas laterales son

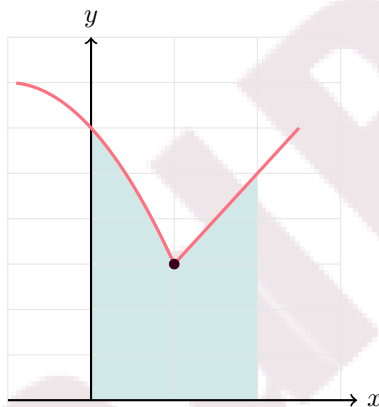
$$f'_-(4) = (-2x + 4)|_{x=4} = -4, \quad f'_+(4) = 2;$$

como no coinciden, f no es derivable en $x = 4$.

En el primer tramo, $f'(x) = -2x + 4$ se anula en $x = 2$: la función crece hasta ese punto y decrece entre 2 y 4. En el segundo tramo, $f'(x) = 2 > 0$, de modo que vuelve a crecer para $x > 4$. Así, hay un máximo relativo en $x = 2$, con $f(2) = 7$, y un mínimo relativo en $x = 4$, con $f(4) = 3$.

Para el área entre $x = 3$ y $x = 5$, primero comprobamos que la gráfica está sobre el eje X : en $[3, 4]$ sus valores van de 6 a 3, y en $[4, 5]$ la recta toma valores de 3 a 5. Como la expresión cambia en $x = 4$, dividimos la integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3) dx + \int_4^5 (2x - 5) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_3^4 + [x^2 - 5x]_4^5 = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$



f es continua y no derivable en 4; máximo relativo (2, 7); mínimo relativo (4, 3); $\mathcal{A} = \frac{26}{3}$.

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad de sucesos con coche y moto

Sean C el suceso «tener coche» y M «tener moto». Se sabe que $P(C^c \cap M^c) = 0,07$ y $P(M^c | C^c) = 0,28$. Primero hallamos la probabilidad de no tener coche:

$$P(C^c) = \frac{P(C^c \cap M^c)}{P(M^c | C^c)} = \frac{0,07}{0,28} = 0,25,$$

por lo que $P(C) = 0,75$. Además, $P(M | C) = 0,36$ y $P(M | C^c) = 1 - 0,28 = 0,72$. Las probabilidades conjuntas son

$$P(C \cap M) = 0,75(0,36) = 0,27, \quad P(C \cap M^c) = 0,75(0,64) = 0,48, \quad P(C^c \cap M) = 0,25(0,72) = 0,18.$$

a) Tener solo uno de los dos vehículos puede ocurrir de dos formas incompatibles: coche sin moto o moto sin coche. Sumamos ambas probabilidades: $0,48 + 0,18 = 0,66$. b) La probabilidad de tener al menos uno es el complementario de no tener ninguno: $1 - 0,07 = 0,93$. c) Si tiene coche, la probabilidad de que no tenga moto es $1 - P(M | C) = 1 - 0,36 = 0,64$. d) Para que C y M^c fueran independientes, debería cumplirse $P(C \cap M^c) = P(C)P(M^c)$. Pero $P(M^c) = 0,48 + 0,07 = 0,55$ y $0,48 \neq 0,75(0,55) = 0,4125$, así que no son independientes. Sí son compatibles, pues $P(C \cap M^c) = 0,48 > 0$.

a) 0,66; b) 0,93; c) 0,64; d) no independientes y compatibles.

Ejercicio 6 · Probabilidad condicionada en teletrabajo

Sean I «trabaja por cuenta ajena con contrato indefinido», T «contrato temporal», A «por cuenta propia» y F «opina que el teletrabajo mejora la conciliación». Las probabilidades de los tres tipos de empleo son 0,72, 0,11 y 0,17. Además, $P(F | I) = 0,87$, $P(F | A) = 0,86$ y $P(F) = 1 - 0,1251 = 0,8749$. a) Llamemos $p = P(F | T)$. Por probabilidad total,

$$0,72(0,87) + 0,11p + 0,17(0,86) = 0,8749,$$

de donde $0,11p = 0,1023$ y $p = 0,93$. b) Para calcular la probabilidad de no trabajar por cuenta propia sabiendo que piensa que el teletrabajo mejora la conciliación, dividimos la probabilidad conjunta de F con I o T por $P(F)$:

$$P(A^c | F) = \frac{P(I \cap F) + P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0,72(0,87) + 0,11(0,93)}{0,8749} = \frac{7287}{8749} \approx 0,8329.$$

$$P(F | T) = 0,93; \quad P(A^c | F) = \frac{7287}{8749} \approx 0,8329.$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Distribución normal

Sea X la altura de una planta; $X \sim N(145, 22^2)$ cm. a) Estandarizamos los extremos de la probabilidad:

$$P(135 < X < 155) = \Phi\left(\frac{155 - 145}{22}\right) - \Phi\left(\frac{135 - 145}{22}\right) = \Phi(0,4545) - \Phi(-0,4545) \approx 0,3506.$$

Por tanto, aproximadamente el 35,06% de las plantas mide entre 135 y 155 cm. b) La normal es simétrica respecto de su media, así que la mitad de las plantas queda por encima de 145 cm. La altura mínima para pertenecer al 50% más alto es 145 cm. c) Si se toman $n = 16$ plantas, la media muestral tiene media 145 y desviación típica $22/\sqrt{16} = 5,5$ cm:

$$\bar{X} \sim N(145, 5,5^2).$$

Así,

$$P(140 < \bar{X} < 151) = \Phi\left(\frac{151 - 145}{5,5}\right) - \Phi\left(\frac{140 - 145}{5,5}\right) = \Phi(1,0909) - \Phi(-0,9091) \approx 0,6807.$$

$$\boxed{\text{a) } 35,06\%; \quad \text{b) } 145 \text{ cm}; \quad \text{c) } P \approx 0,6807.}$$

Ejercicio 8 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de viajeros con mascota es $\hat{p} = 12/300 = 0,04$. Para un intervalo bilateral de una proporción empleamos

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

a) Con confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,1701$. El error es

$$E = 2,1701 \sqrt{\frac{0,04(0,96)}{300}} \approx 0,0222,$$

por lo que el intervalo es $(0,0178, 0,0622)$. b) Para que la diferencia entre la proporción muestral y la poblacional sea como máximo 0,02, usamos el margen de error $E = 0,02$. Con confianza del 95%, $z_{0,975} = 1,96$, luego

$$n \geq \frac{z_{0,975}^2 (0,04)(0,96)}{0,02^2} \approx 368,78.$$

El menor tamaño entero que cumple la condición es 369 viajeros.

$$\boxed{IC_{97\%} \approx (0,0178, 0,0622); \quad n_{\min} = 369.}$$