

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2011

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Límites, integral y derivabilidad

a) **Límites.** En el primer límite, cuando $x \rightarrow +\infty$, $e^{-(x+1)} \rightarrow 0$; en el segundo, cuando $x \rightarrow -\infty$, $e^{-(x+1)} \rightarrow +\infty$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = 0.$$

Conclusión. Los límites son $\frac{1}{2}$ y 0, respectivamente.

b) **Integral.** En el denominador aparece la derivada del polinomio $1 + 3x^2$ salvo un factor constante. Con el cambio $u = 1 + 3x^2$, $du = 6x dx$:

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx = \frac{1}{6} \int_1^4 \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln 4 = \frac{1}{3} \ln 2.$$

Conclusión. La integral vale $\frac{1}{3} \ln 2$.

c) **Dominio y derivada de** $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Para que la raíz exista exigimos que el radicando sea no negativo:

$$x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) \geq 0.$$

El producto es no negativo fuera de las raíces, así que $D_f = (-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$. En los puntos donde el radicando es positivo podemos aplicar la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 - 9x + 14}}.$$

En $x = 2$ y $x = 7$ el denominador de esta expresión se anula; además, los cocientes incrementales laterales dentro del dominio divergen, por lo que no existe derivada finita en esos extremos. La función es derivable en los intervalos abiertos del dominio. **Conclusión.** El dominio es $(-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$ y la función es derivable en $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$.

Opción A - Ejercicio 2. Equidistancia, volumen y proyección

La recta, en forma paramétrica, es

$$r : (x, y, z) = (1, -1, -2) + t(2, 1, 2).$$

a) **Puntos equidistantes de los planos.** Los dos planos tienen normales de módulo $\sqrt{14}$. Para un punto de la recta $X(t)$, los numeradores de sus distancias a π_1 y π_2 son, respectivamente, $|9t - 4|$ y $|6 - t|$. Igualamos esas distancias:

$$|9t - 4| = |6 - t|.$$

Resolviendo los dos casos, $9t - 4 = 6 - t$ o $9t - 4 = -(6 - t)$, obtenemos $t = 1$ o $t = -\frac{1}{4}$. Al sustituir en r :

$$X(1) = (3, 0, 0), \quad X\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right).$$

Conclusión. Los dos puntos equidistantes son $(3, 0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$.

b) **Volumen del tetraedro con los planos coordenados.** Los interceptos de $\pi_1 : 2x + 3y + z = 1$ con los ejes son $A = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $B = (0, \frac{1}{3}, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. El tetraedro tiene como vértice adicional el origen, y su volumen es

$$V = \frac{1}{6} |\det(A, B, C)| = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{36}.$$

Conclusión. El volumen es $\frac{1}{36}$ unidades cúbicas.

c) **Proyección ortogonal de r sobre π_2 .** El plano tiene normal $\vec{n} = (2, 1, -3)$. La proyección de un vector director $\vec{d} = (2, 1, 2)$ sobre el plano se obtiene quitando su componente normal:

$$\vec{d}_{\pi_2} = \vec{d} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (2, 1, 2) + \frac{1}{14} (2, 1, -3) \sim (6, 3, 5).$$

Para proyectar el punto $R_0 = (1, -1, -2)$ de r , usamos la fórmula del pie perpendicular a $2x + y - 3z - 1 = 0$:

$$R'_0 = R_0 - \frac{2(1) + (-1) - 3(-2) - 1}{14}(2, 1, -3) = \left(\frac{1}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$

Conclusión. La proyección es la recta paramétrica $(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}\right) + t(6, 3, 5)$.

Opción A - Ejercicio 3. Rango de una matriz con parámetro

La matriz tiene tres columnas, así que su rango es como máximo 3. Consideramos los menores de orden tres formados por las tres primeras filas y por las filas 1, 2, 4:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -a \end{pmatrix} = a + 6, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix} = 3a^2 + 12a + 4.$$

Si $a \neq -6$, el primer menor no se anula. Si $a = -6$, el segundo vale $40 \neq 0$. En todo caso existe un menor de orden tres no nulo, por lo que el rango alcanza su valor máximo. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Opción A - Ejercicio 4. Potencias de una matriz

Sea

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinante. El bloque superior izquierdo tiene determinante $-\sin^2 x - \cos^2 x = -1$ y el elemento restante de la diagonal es 1: **Conclusión.** $\det M = -1$.

b) Cuadrado. Multiplicamos la matriz por sí misma; en el bloque superior izquierdo, los elementos diagonales son $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y los no diagonales se cancelan:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Conclusión. $M^2 = I$.

c) Potencia 25. La igualdad $M^2 = I$ hace que las potencias se repitan con periodo 2: las pares valen I y las impares valen M . Como $25 = 2 \cdot 12 + 1$, **Conclusión.** $M^{25} = M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 1. Simetría y perpendicularidad

La recta r pasa por $A = (1, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{u} = (2, 1, -1)$.

a) Punto simétrico respecto de r . El pie H de la perpendicular desde $P = (0, 1, 1)$ a la recta es

$$H = A + \frac{(P - A) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Como $P - A = (-1, 2, 1)$, $(P - A) \cdot \vec{u} = -1$ y $\|\vec{u}\|^2 = 6$,

$$H = (1, -1, 0) - \frac{1}{6}(2, 1, -1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

El punto simétrico P' cumple que H es el punto medio entre P y P' , luego

$$P' = 2H - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Conclusión. El simétrico de P respecto de r es $\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

b) Recta por P perpendicular a r y que corta a s . La recta s es el eje z , así que un punto suyo es $Q = (0, 0, t)$. El vector $\overrightarrow{PQ} = (0, -1, t-1)$ debe ser perpendicular a $\vec{u}$:

$$(0, -1, t-1) \cdot (2, 1, -1) = -t = 0 \implies t = 0.$$

El punto de corte es el origen y la dirección desde P hasta ese punto es $(0, -1, -1)$. **Conclusión.** La recta es $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(0, -1, -1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Opción B - Ejercicio 2. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la columna de términos independientes son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4k \\ 0 \\ k^2 \end{pmatrix}.$$

El determinante es $\det A = -2k(k-2)$. Si $k \neq 0, 2$, es no nulo y el sistema es compatible determinado.

Para $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$: las dos primeras ecuaciones son dependientes y la tercera es independiente. La misma dependencia se cumple en la ampliada, así que $\text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es SCl. Si $k = 2$, las dos primeras filas de coeficientes coinciden, mientras que la tercera tiene todos sus coeficientes nulos y término independiente 4; por tanto, $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A^*) = 2$, luego el sistema es SI. **Conclusión.** Es SCD si $k \neq 0, 2$, SCl si $k = 0$ y SI si $k = 2$.

Para $k = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4, \\ -x + y + z = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuaciones dan $y = 1$, $x = 0$; la segunda da $z = -1$. **Conclusión.** Para $k = 1$, $(x, y, z) = (0, 1, -1)$.

Para $k = 2$, las ecuaciones primera y tercera coinciden después de dividir la primera entre 2. Tomando $z = t$, resolvemos

$$x + 2y = 4, \quad -8x + 4y + 2t = 0,$$

lo que da $x = \frac{4}{5} + \frac{t}{5}$ e $y = \frac{8}{5} - \frac{t}{10}$. **Conclusión.** Para $k = 2$, las soluciones son $(\frac{4}{5} + \frac{t}{5}, \frac{8}{5} - \frac{t}{10}, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Opción B - Ejercicio 3. Continuidad en un punto

Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales deben coincidir con $f(0) = k$. Por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0,$$

ya que $1/x \rightarrow -\infty$. Por la derecha usamos la identidad $\frac{\cos x - 1}{\sin x} = -\tan \frac{x}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0.$$

Los dos límites laterales son cero, por lo que la continuidad exige $k = 0$. **Conclusión.** La función es continua en $x = 0$ para $k = 0$.

Opción B - Ejercicio 4. Área y volumen de revolución

a) **Área.** La función es $f(x) = -\sin x$. Es negativa en $(0, \pi)$ y positiva en $(\pi, 2\pi)$, así que dividimos el área donde cambia el signo:

$$\mathcal{A} = -\int_0^\pi (-\sin x) dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x) dx = 2 + 2 = 4.$$

Conclusión. El área total es 4 unidades cuadradas.

b) **Volumen al girar alrededor del eje OX.** Aplicamos el método de discos: cada sección perpendicular al eje tiene radio $|f(x)|$, por lo que $V = \pi \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$. Usando $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$,

$$V = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi^2.$$

Conclusión. El volumen del sólido de revolución es π^2 unidades cúbicas.