

Julio de 2024 - Convocatoria extraordinaria

El examen permite escoger cuatro de los ocho problemas. Aquí se resuelven los ocho, mostrando las operaciones y justificando los resultados.

Problema 1 - Invertibilidad, inversa y conmutación

La matriz depende del parámetro real k :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Valores de k para los que A es invertible

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 - k \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -k(-k-2) + 3\left(-k - \frac{2}{3}\right) \\ &= k^2 + 2k - 3k - 2 \\ &= k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1). \end{aligned}$$

El determinante se anula cuando $k = 2$ o $k = -1$. Por tanto,

$$A \text{ es invertible si y solo si } k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

b) Matriz inversa para $k = 0$

Al sustituir $k = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A_0 = (0-2)(0+1) = -2 \neq 0$, existe A_0^{-1} . La calculamos reduciendo la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Aplicamos las operaciones elementales

$$R_1 \leftrightarrow R_3, R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1, R_2 \leftarrow 3R_2, R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3, R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3, R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2, R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_3.$$

Así queda

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y, por tanto,

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $A_0 A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$

c) Matrices diagonales D tales que $A_0 D = D A_0$

Sea $D = \text{diag}(x, y, z)$. Calculamos cada producto por separado:

$$A_0 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & \frac{y}{3} & z \\ 2x & -y & -z \end{pmatrix}, \quad D A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & \frac{y}{3} & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

Igualar las entradas correspondientes da $3z = 3x$ y $z = y$; la entrada inferior izquierda confirma $x = z$. Luego $x = y = z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$D = \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Ecuación matricial

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

a) Valores de a para los que $A^2 X = B$ tiene solución única

Una ecuación cuadrada $A^2 X = B$ tiene solución única para cualquier B exactamente cuando A^2 es invertible. Primero calculamos $A^2 = A \cdot A$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 2+6 \\ 3+6+a & 4 & 6+2+3 \\ a+3a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 8 \\ a+9 & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculamos el determinante de A , desarrollando por la segunda columna:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2(3 - 2a).$$

Usamos $\det(A^2) = (\det A)^2$:

$$\det(A^2) = (2(3 - 2a))^2 = 4(2a - 3)^2.$$

Este determinante es distinto de cero si y solo si $2a - 3 \neq 0$. Por ello,

$$a \neq \frac{3}{2}.$$

b) Calcular α, β, γ sabiendo que $X = (3, -2, -1)^T$

La ecuación es $A^2 X = B$. Para evitar multiplicar de una vez tres matrices, calculamos primero AX :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 9-4-1 \\ 3a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3a-3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos ahora por A otra vez:

$$A^2X = A(AX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2(3a-3) \\ 3+8+3a-3 \\ a+3(3a-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix}.$$

Como $B = (\alpha, \beta, \gamma)^T$, igualamos sus componentes:

$$\alpha = 6a - 5, \beta = 3a + 8, \gamma = 10a - 9.$$

Problema 3 · Intersección y perpendicularidad de rectas

Pasamos las ecuaciones dadas a forma paramétrica. Para r , tomamos como parámetro común t :

$$r: x = 1 + t, y = 2 + t, z = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}.$$

Para s , usamos el parámetro u :

$$s: x = 3 - 2u, y = 3 - u, z = -1 + 2u, u \in \mathbb{R}.$$

Sus puntos y vectores directores son $P_r = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ y $P_s = (3, 3, -1)$, $\vec{v}_s = (-2, -1, 2)$.

a) Comprobar que se cortan y hallar P

Igualemos las coordenadas de un punto de cada recta:

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2u, \\ 2 + t = 3 - u, \\ 1 + 2t = -1 + 2u. \end{cases} \iff \begin{cases} t + 2u = 2, \\ t + u = 1, \\ t - u = -1. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones dan $u = 1$ y $t = 0$; al sustituir en la tercera se obtiene $0 - 1 = -1$, así que las tres ecuaciones son compatibles. Sustituimos para comprobar el punto:

$$r(0) = (1, 2, 1), s(1) = (1, 2, 1).$$

Por tanto, las rectas se cortan en

$$P = (1, 2, 1).$$

b) Recta por P perpendicular a r y a s

Un vector perpendicular a los dos vectores directores se obtiene con el producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r \times \vec{v}_s &= (1, 1, 2) \times (-2, -1, 2) \\ &= (1 \cdot 2 - 2(-1), 2(-2) - 1 \cdot 2, 1(-1) - 1(-2)) \\ &= (4, -6, 1). \end{aligned}$$

La recta pedida pasa por P y tiene ese vector director. En forma paramétrica:

$$t: x = 1, y = 2 - 6\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 4 · Distancia al plano e intersecciones con los ejes

El plano está en forma general:

$$\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0.$$

a) Elegir d para que la distancia al origen sea una unidad

Para un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia desde (x_0, y_0, z_0) es

$$\text{dist} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Con el origen $(0, 0, 0)$ y $D = -d$:

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{|6(0) + 4(0) - 3(0) - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}.$$

Imponemos que esta distancia sea 1:

$$\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \implies |d| = \sqrt{61} \implies \boxed{d = \pm\sqrt{61}}.$$

b) Puntos donde el plano corta los ejes

En el eje X , $y = z = 0$. Sustituyendo en el plano:

$$6x - d = 0 \implies x = \frac{d}{6} \implies \boxed{A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)}.$$

En el eje Y , $x = z = 0$:

$$4y - d = 0 \implies y = \frac{d}{4} \implies \boxed{B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right)}.$$

En el eje Z , $x = y = 0$:

$$-3z - d = 0 \implies z = -\frac{d}{3} \implies \boxed{C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)}.$$

c) Ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, para $d \neq 0$

Restamos las coordenadas de los puntos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right).$$

El producto escalar y las normas son

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{d^2}{36},$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \frac{|d|\sqrt{13}}{12}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = \frac{|d|\sqrt{5}}{6}.$$

Por la fórmula del ángulo entre vectores y dado que $d \neq 0$:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{d^2/36}{d^2\sqrt{65}/72} = \frac{2}{\sqrt{65}}.$$

El resultado exacto y su aproximación son

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \approx 75.6367^\circ \approx 1.3201 \text{ rad.}}$$

Problema 5 · Parábola, recta y área

La función es $h(x) = ax + x^2$. Su dominio es $\mathbb{R}$ porque es polinómica.

a) Hallar a para que el mínimo esté en $x = -3/4$

Derivamos:

$$h'(x) = a + 2x, \quad h''(x) = 2.$$

En un mínimo interior, $h'(x) = 0$, y aquí $h''(x) = 2 > 0$, así que el punto crítico es efectivamente un mínimo. Sustituimos la abscisa pedida:

$$a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \implies a - \frac{3}{2} = 0 \implies \boxed{a = \frac{3}{2}}.$$

Así,

$$h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x, \quad h'(x) = 2x + \frac{3}{2}.$$

El vértice de la parábola es

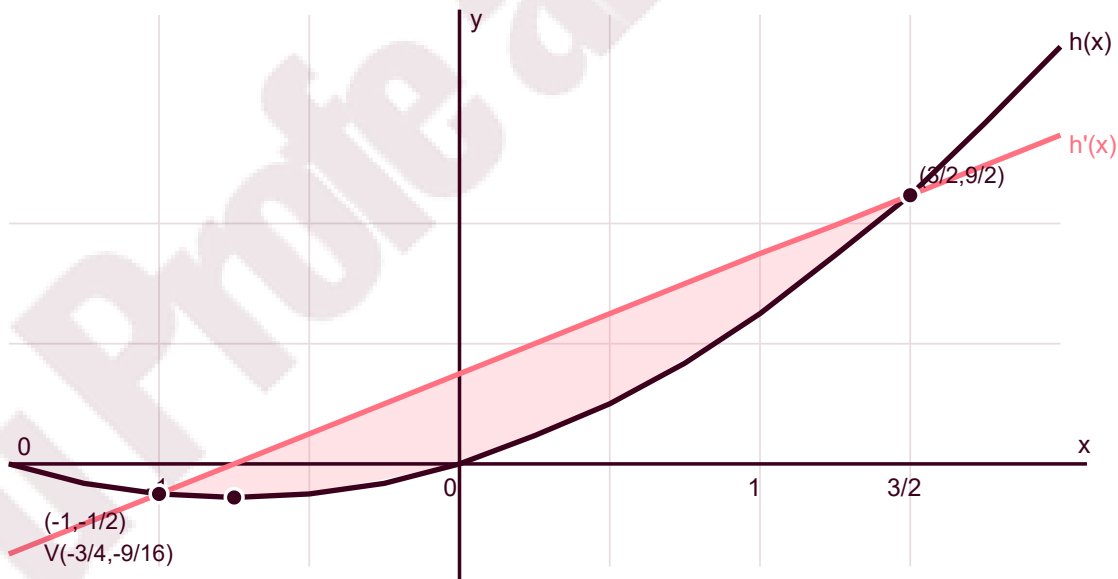
$$\left(-\frac{3}{4}, h\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right).$$

b) Gráficas propias de $y = h(x)$ e $y = h'(x)$

Los puntos de corte se obtienen igualando las funciones:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \implies x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \implies (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Por tanto, se cortan en $(-1, -1/2)$ y $(3/2, 9/2)$. El dibujo marca también el vértice y sombrea la región comprendida entre las curvas:



c) Área comprendida entre las curvas

En $[-1, 3/2]$, la recta $h'(x)$ queda por encima de $h(x)$; por ejemplo, en $x = 0$, $h'(0) - h(0) = 3/2 > 0$. El área es la integral de función superior menos función inferior:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3/2} (h'(x) - h(x)) dx \\ &= \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3/2} \\ &= \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{81}{48} + \frac{44}{48} = \frac{125}{48} \approx 2.6042 \text{ unidades}^2. \end{aligned}$$

Problema 6 · Caja de volumen máximo

Al cortar cuadrados de lado x en las esquinas de una hoja de $16 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, la base queda de lados $16 - 2x$ y $10 - 2x$, y la altura es x . Para que las tres dimensiones sean positivas:

$$x > 0, 16 - 2x > 0, 10 - 2x > 0 \implies 0 < x < 5.$$

El volumen se obtiene multiplicando largo, ancho y altura:

$$V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x.$$

Derivamos para localizar los extremos:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x - 20)(x - 2).$$

Los puntos críticos satisfacen

$$V'(x) = 0 \implies x = 2 \text{ o } x = \frac{20}{3}.$$

Solo $x = 2$ pertenece al dominio $(0, 5)$. Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de V'	Comportamiento
$(0, 2)$	$x = 1 : V'(1) = 68$	+	Creciente
$(2, 5)$	$x = 3 : V'(3) = -44$	-	Decreciente

La función pasa de creciente a decreciente en $x = 2$; además, el volumen tiende a 0 en los extremos físicos $x = 0$ y $x = 5$. Por tanto, allí se alcanza el máximo absoluto. Las dimensiones son

$$16 - 2(2) = 12 \text{ cm}, 10 - 2(2) = 6 \text{ cm}, x = 2 \text{ cm}.$$

El volumen máximo vale

$$V(2) = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144 \text{ cm}^3.$$

Problema 7 · Probabilidades de producción y defectos

Definimos los sucesos M_1, M_2, M_3 : la lata procede de cada máquina; D : la lata es defectuosa; $G = \bar{D}$: la lata no es defectuosa. Los datos son

$$P(M_1) = 0.30, P(M_2) = 0.25, P(M_3) = 1 - 0.30 - 0.25 = 0.45,$$

$$P(D) = 0.1025, P(D | M_1) = 0.10, P(D | M_2) = 0.05.$$

a) Probabilidad de defecto en la tercera máquina

Sea $q = P(D | M_3)$. Aplicamos la ley de la probabilidad total, sumando las tres rutas que pueden producir una lata defectuosa:

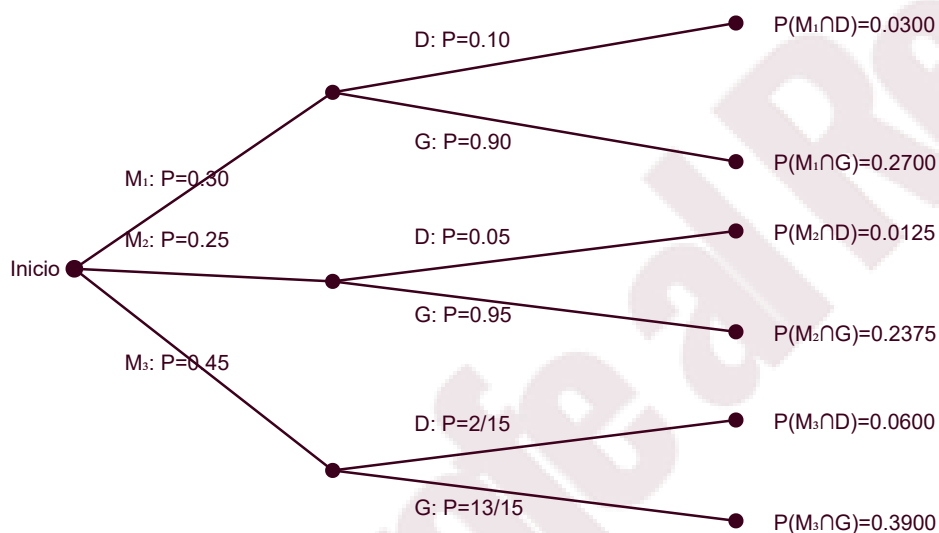
$$P(D) = P(M_1)P(D | M_1) + P(M_2)P(D | M_2) + P(M_3)q,$$

$$0.1025 = 0.30(0.10) + 0.25(0.05) + 0.45q,$$

$$0.1025 = 0.0425 + 0.45q,$$

$$q = \frac{0.1025 - 0.0425}{0.45} = \frac{0.06}{0.45} = \frac{2}{15}.$$

Así, $P(G | M_3) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$. El árbol recoge primero la máquina y después si la lata es defectuosa o buena; a la derecha aparecen las probabilidades conjuntas de cada ruta.



b) Probabilidad de que una lata buena proceda de M_1

La probabilidad total de que una lata sea buena es

$$P(G) = 1 - P(D) = 1 - 0.1025 = 0.8975.$$

En el árbol, la ruta M_1 y buena tiene probabilidad $P(M_1 \cap G) = 0.30(1 - 0.10) = 0.27$. Por Bayes:

$$P(M_1 | G) = \frac{P(M_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{0.30(0.90)}{0.8975} = \frac{108}{359} \approx \boxed{0.3008}.$$

c) Probabilidad de que una defectuosa no proceda de M_2

Las máquinas son sucesos incompatibles; "no M_2 " junto con defecto puede proceder de M_1 o de M_3 . Sumamos esas dos rutas del árbol y dividimos entre la probabilidad total de defecto:

$$\begin{aligned} P(\bar{M}_2 | D) &= \frac{P(M_1 \cap D) + P(M_3 \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{0.30(0.10) + 0.45(2/15)}{0.1025} \\ &= \frac{0.03 + 0.06}{0.1025} = \frac{36}{41} \approx \boxed{0.8780}. \end{aligned}$$

Problema 8 · Distribución binomial de emoticonos

Suponemos que los mensajes son independientes y que la probabilidad de incluir un emoticono es la misma en cada uno. Si X cuenta cuántos emoticonos aparecen en diez mensajes, entonces

$$X \sim B(10, 0.6), P(X = k) = \binom{10}{k} (0.6)^k (0.4)^{10-k}.$$

a) Ningún mensaje contiene emoticono

Aplicamos la fórmula binomial para $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0.6)^0 (0.4)^{10} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10} = \frac{1024}{9765625} = 0.0001048576 \approx \boxed{0.0001}.$$

b) Exactamente dos quintas partes contienen emoticono

Dos quintas partes de diez son cuatro, porque $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$. Sustituimos $k = 4$:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{10}{4} (0.6)^4 (0.4)^6 \\ &= 210 (0.6)^4 (0.4)^6 \\ &= \frac{217728}{1953125} = 0.111476736 \approx \boxed{0.1115}. \end{aligned}$$

c) Ocho o más mensajes contienen emoticono

"Ocho o más" corresponde a $X = 8, 9, 10$. Sumamos esos tres casos:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} (0.6)^k (0.4)^{10-k} \\ &= 45 (0.6)^8 (0.4)^2 + 10 (0.6)^9 (0.4) + (0.6)^{10} \\ &= 0.120932352 + 0.040310784 + 0.0060466176 \\ &= \frac{1633689}{9765625} = 0.1672897536 \\ &\approx \boxed{0.1673}. \end{aligned}$$