

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Comprobar razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB = BA$, entonces se deduce que $A^2 B^2 = (AB)^2$. (2 puntos).

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O ,

respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 puntos), y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa. (2 puntos).

c) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$. (2 puntos).

Solución:

a) Debemos comprobar que, si $AB = BA \rightarrow A^2 B^2 = (AB)^2$

$$\begin{aligned} A^2 B^2 &= A A B B = (\text{como el producto de matrices es asociativo}) \\ &= A (A B) B = (\text{como } AB = BA) \\ &= A (B A) B = (\text{como el producto de matrices es asociativo}) \\ &= (A B) (A B) = (AB)^2 (\text{como queríamos comprobar}) \end{aligned}$$

b) Calculemos,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)(-4) + 10(-3) & (-4)10 + 10 \cdot 7 \\ 0 & (-3)(-4) + 7(-3) & (-3)10 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos comprobado que $A^2 - 3A + 2I = O$
* * *

Si A es una matriz que cumple $A^2 - 3A + 2I = O \rightarrow \exists A^{-1}$

Para comprobar que la matriz A tiene inversa debemos obtener una expresión del tipo $A(\text{matriz}) = I$

Partimos de: $A^2 - 3A + 2I = O$, luego,

$$A^2 - 3A = O - 2I$$

$A^2 - 3A = -2I$, por la propiedad distributiva del producto respecto de la diferencia de matrices,

$$A(A - 3I) = -2I, \text{ multiplicando ambos miembros por } \frac{-1}{2}$$

$$A(A - 3I) \frac{-1}{2} = I$$

Hemos obtenido que $A \left[(A - 3I) \frac{-1}{2} \right] = I$, por lo tanto la matriz inversa de A es $\left[(A - 3I) \frac{-1}{2} \right]$

c) Como $A^2 - 3A + 2I = O$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por la matriz A por la derecha,

$$A^2 A - 3A A + 2IA = OA, \text{ operando}$$

$$A^3 - 3A^2 + 2A = O, \text{ despejando } A^3$$

$$A^3 = 3A^2 - 2A,$$

Como $A^2 - 3A + 2I = O$, $A^2 = 3A - 2I$, por lo tanto

$$A^3 = 3(3A - 2I) - 2A = 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$$

Hemos obtenido: $A^3 = 7A - 6I$, por lo tanto los valores de α y β buscados serán $\alpha = 7$ y $\beta = -6$.

Tu Profe al Rescate

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β

parametros reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Unas ecuaciones implícitas de r_1 . (2 puntos).
- La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π , (2 puntos) y la ecuación de ese plano π , (2 puntos).
- El área del triángulo de vértices P , Q y R , siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2 . (4 puntos).

Solución:

a) Ecuaciones implícitas de r_1

Conocemos la ecuación vectorial de r_1 , a partir de ella obtenemos su ecuación continua,

$$r_1: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1}. \text{ Una ecuación implícita de } r_1 \text{ será: } \begin{cases} \frac{x-1}{2} = y \\ y = \frac{z-2}{-1} \end{cases}, \text{ efectuando las operaciones,}$$

$$\begin{cases} x-1 = 2y \\ -y = z-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-1 = 0 \\ y+z-2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } r_1: \begin{cases} x-2y-1 = 0 \\ y+z-2 = 0 \end{cases}$$

b) Justificar que r_1 y r_2 están contenidas en un plano.

Las rectas r_1 y r_2 estarán contenidas en un plano si son paralelas o si se cortan.

Estudiamos la posición relativa de las dos rectas. Para ello debemos estudiar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \\ \alpha = 1+\beta \\ 2-\alpha = -1-2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -2 \\ \alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = -3 \end{cases}, \text{ es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.}$$

$$\text{Su matriz de coeficientes es } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y su matriz ampliada } M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de M . M es 3×2 , su máximo rango será 2.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Calculemos el rango de M' . M' es 3×3 , su máximo rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 2 - 4 = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Hemos obtenido que $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 = \text{número de incógnitas}$, por lo tanto es un sistema compatible determinado. Es decir, las rectas r_1 y r_2 se cortan. Luego, **las dos rectas están contenidas en un plano**.

Para obtener la ecuación de este plano, obtengamos el punto, R , de corte entre r_1 y r_2 .

Del estudio de rangos realizado anteriormente, el sistema a resolver será:
$$\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $\alpha = -1$. Con esta solución es suficiente para obtener el punto R .

Sustituyendo el valor de α en la ecuación de r_1 :
$$\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \end{cases} \rightarrow R(-1, -1, 3)$$

Del plano π que contiene a r_1 y r_2 conocemos:
$$\begin{cases} \text{punto } R(-1, -1, 3) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \text{de } r_1 \rightarrow \vec{u}(2, 1, -1) \\ \text{de } r_2 \rightarrow \vec{v}(0, 1, -2) \end{cases} \end{cases}$$

Su ecuación se obtiene:
$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)(-2+1) - (y+1)(-4) + (z-3)(2) = 0$$

$$-x-1+4y+4+2z-6=0$$

$$-x+4y+2z-3=0$$

Solución, $\pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

c) Área del triángulo de vértices $P(-1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 2)$ y $R(-1, -1, 3)$.

Conociendo los tres vértices del triángulo, su área podemos calcularla mediante la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2} \left| \vec{PR} \times \vec{QR} \right|$$

$$\vec{PR} = (-1, -1, 3) - (-1, 0, 1) = (0, -1, 2)$$

$$\vec{QR} = (-1, -1, 3) - (0, 1, 2) = (-1, -2, 1)$$

$$\vec{PR} \times \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+4) - \vec{j}(+2) + \vec{k}(-1) = (3, -2, -1)$$

$$\left| \vec{PR} \times \vec{QR} \right| = |(3, -2, -1)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\text{Finalmente, } A_T = \frac{1}{2} \sqrt{14} u^2 = 1'8708286... u^2 \cong 1'8708 u^2$$

OPCIÓN A

PROBLEMA A.3. Se dan las funciones $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. (4 puntos).
- Los dominios de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (3 puntos).
- La expresión simplificada de la función $f(x) + g(x)$, (1'5 puntos), y el recorrido de esta función $f(x) + g(x)$. (1'5 puntos).

Solución:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Antes de derivar apliquemos propiedades de los logaritmos, $f(x) = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(1+x)(1-x)} \right] = \frac{1}{1-x^2}$$

$g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, apliquemos propiedades de los logaritmos,

$$g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{(1-x)(1+x)} \right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

<i>Solución:</i> $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ y $g'(x) = \frac{-1}{1-x^2}$
--

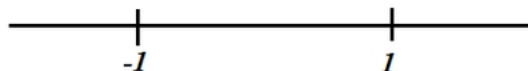
b) Dominio de $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

El argumento del logaritmo neperiano debe ser positivo, luego $\frac{1+x}{1-x} > 0$

Estudiemos el signo del cociente,

$$1+x=0; \quad x=-1; \quad 1-x=0; \quad x=1$$

Debemos estudiar el signo del cociente en los intervalos:



$$x=-2 \rightarrow \frac{1+(-2)}{1-(-2)} = \frac{-1}{3} < 0$$

$$x=0 \rightarrow \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} > 0$$

Luego:

Por tanto,
Dom $f(x) = (-1, 1)$
(intervalo abierto)

$$x=2 \rightarrow \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} < 0$$

Dominio de $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Como en la función anterior, $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0 \rightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0$

Estudiamos el signo del cociente,

Los intervalos a considerar son los mismos que en el estudio del dominio de $f(x)$,

$$x = -2 \rightarrow \frac{1+(-2)}{1+(-2)} = \frac{3}{-1} < 0$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} > 0 \quad \text{Luego: } \begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ | \quad | \\ -1 \quad 1 \end{array} \quad \text{Por tanto, } \mathbf{Dom\ } g(x) = (-1, 1)$$

$$x = 2 \rightarrow \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3} < 0$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x) + \ln(1-x) - \ln(1+x)] = \frac{1}{2} 0 = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $f(x) + g(x) = 0$, por lo tanto el recorrido de $f(x) + g(x)$ es $\{0\}$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 7$. (4 puntos).
- Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 puntos).
- Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado. (3 puntos).

Solución:

Estudiamos el sistema
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
. Su matriz ampliada, A' , es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes, A , es 3×3 por lo que su máximo rango posible será 3.

A' es 3×4 por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de A ,

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5 + 3 - 3\alpha - 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 8\alpha + 7$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ \alpha_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Para $\alpha \neq 1, 7 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Para $\alpha = 7$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ y sabemos que } |A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$$

Calculemos el rango de A ,

$$\left. \begin{array}{l} |7| = 7 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 1 = 48 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculemos el rango de A' ,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al añadir al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de A' ,

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo que, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$. Para $\alpha = 7$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right), \text{ esta matriz tiene la 1ª y 2ª filas iguales, a efectos de cálculo de rango podemos}$$

eliminar una de ellas, por lo tanto el máximo rango de A y A' será 2.

Calculemos el rango de A ,

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Luego $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$. Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Procedamos a resolver los apartados.

a) Para $\alpha = 7$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado

Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son x e y :

$$\begin{cases} 7z + y = 1 - z \\ x + 7y = 1 - z \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 1-z & 7 \end{vmatrix}}{48} = \frac{7-7z-1+z}{48} = \frac{6-6z}{48} = \frac{1-z}{8} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{48} = \frac{7-7z-1+z}{48} = \frac{6-6z}{48} = \frac{1-z}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \alpha = 7, \text{ la solución es: } \begin{cases} x = \frac{1-\lambda}{8} \\ y = \frac{1-\lambda}{8} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Del estudio inicial, el sistema es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ y $\alpha = 7$.

c) Del estudio inicial, el sistema es compatible determinado para $\alpha \neq 1$ y 7 , es decir, $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 7\}$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \{x - 1 = y - 2 = z\}$. Obtener

razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 puntos).
- La distancia entre las rectas r y s , (2 puntos), **justificando** que las rectas r y s se cruzan. (2 puntos).
- Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s . (3 puntos).

Solución:

a) De la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ obtengamos su ecuación paramétrica.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, resolvemos el sistema: $\begin{cases} x - y = -z \\ 2x + y = 1 - z \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones: $3x = 1 - 2z$

$$x = \frac{1 - 2z}{3}$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación,

$$\frac{1 - 2z}{3} - y = -z; \quad \frac{1 - 2z}{3} + z = y$$

$$y = \frac{1 - 2z + 3z}{3} = \frac{1 + z}{3}$$

La ecuación paramétrica de la recta r será:
$$\begin{cases} x = \frac{1 - 2\lambda}{3} \\ y = \frac{1 + \lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

De la recta r tenemos: **punto** $P_r = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ y **vector director** $\vec{v}_r = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$, más sencillamente, $\vec{v}_r = (-2, 1, 3)$.

De la recta $s: \{x - 1 = y - 2 = z\}$, tenemos su ecuación continua, por lo tanto se deduce: **punto** $P_s = (1, 2, 0)$ y **vector director** $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$.

b) Veamos si las rectas r y s se cruzan.

Las ecuaciones paramétricas de estas rectas son: $r: \begin{cases} x = \frac{1-2\lambda}{3} \\ y = \frac{1+\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Estudiamos el sistema: $\begin{cases} \frac{1-2\lambda}{3} = 1 + \mu \\ \frac{1+\lambda}{3} = 2 + \mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2\lambda = 3 + 3\mu \\ 1+\lambda = 6 + 3\mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda - 3\mu = 2 \\ \lambda - 3\mu = 5 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$

La matriz ampliada de este sistema es $A' = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$,

A' es $3 \times 3 \rightarrow$ máximo rango de A' es 3; A es $3 \times 2 \rightarrow$ máximo rango de A es 2.

Calculemos el rango de A' ,

$$\left. \begin{aligned} |-2| &= -2 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} &= 6 + 3 = 9 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= -2 - 15 + 6 = -11 \neq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Los dos primeros menores calculados anteriormente nos indican que $\text{ran}(A) = 2$.

Por lo tanto, como $\text{ran}(A) = 2$ y $\text{ran}(A') = 3$ deducimos que las rectas r y s se cruzan.

Para obtener la distancia entre las dos rectas r y s vamos a utilizar el siguiente procedimiento:

Calculamos el plano π que contiene a r y es paralelo a s , por lo tanto de este plano conocemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{punto } P_r \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \\ \text{vectores } \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 1, 3) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 1) \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{la ecuación del plano } \pi \text{ se obtiene: } \begin{vmatrix} x - \frac{1}{3} & y - \frac{1}{3} & z - 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{3} \right) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \left(y - \frac{1}{3} \right) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \left(x - \frac{1}{3} \right) (-2) - \left(y - \frac{1}{3} \right) (-5) + z (-3) = 0 \rightarrow$$

$$-2x + \frac{2}{3} + 5y - \frac{5}{3} - 3z = 0 \rightarrow -2x + 5y - 3z - 1 = 0 \rightarrow \pi: 2x - 5y + 3z + 1 = 0$$

Finalmente, $d(r, s) = d(P_s, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 10 + 1|}{\sqrt{4 + 25 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{38}} = 1'135549...$

Solución: $d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{38}} u.$

$$c) \text{ recta } t / \begin{cases} \text{pase por } \left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0 \right) \\ t \perp r \text{ y } s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } t \perp r \text{ y } s \rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} (1-3) - \vec{j} (-2-3) + \vec{k} (-2-1) = (-2, 5, -3) \end{aligned}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de la recta } t \text{ será: } \begin{cases} x = \frac{41}{57} - 2\lambda \\ y = \frac{-14}{57} + 5\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tu Profecia al Rescate

OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. En el plano XY está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \text{ con } 0 \leq x \leq 40, \text{ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.}$$

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A , de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área de la parcela A . (3 puntos).
- Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. (5 puntos).
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos).

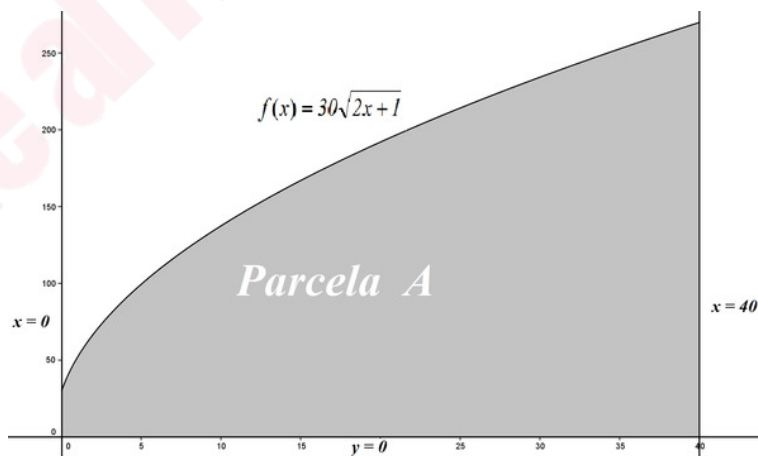
Solución:

Para representar la parcela A el dibujo de las rectas verticales $x = 0$ y $x = 40$ y de la recta horizontal $y = 0$ es sencillo. Efectuemos los cálculos necesarios para representar la función $f(x)$,

$$f(x) = 30\sqrt{2x+1}$$

x	$f(x)$
0	$30\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 30\sqrt{1} = 30$
12	$30\sqrt{2 \cdot 12 + 1} = 30\sqrt{25} = 150$
40	$30\sqrt{2 \cdot 40 + 1} = 30\sqrt{81} = 270$

La representación gráfica de la parcela A será:



a) Obtendremos el área de la parcela A mediante el siguiente cálculo integral,

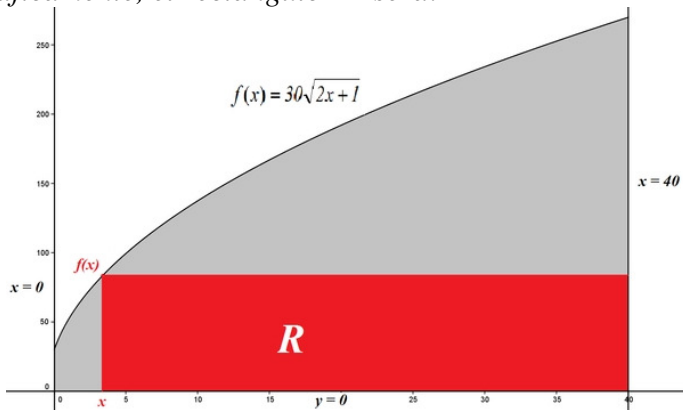
$$\text{Área}_A = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1} \, dx$$

Calculemos, previamente, la integral indefinida,

$$\begin{aligned} \int 30\sqrt{2x+1} \, dx &= 30 \int (2x+1)^{1/2} \, dx = 30 \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{1/2} \, dx = 30 \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \\ &= 15 \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 10(2x+1)^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{(2x+1)^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1} dx = \left[10\sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^{40} = 10\sqrt{(2 \cdot 40 + 1)^3} - 10\sqrt{(2 \cdot 0 + 1)^3} =$
 $= 10\sqrt{81^3} - 10\sqrt{1^3} = 10 \cdot 81\sqrt{81} - 10 = 810 \cdot 9 - 10 = 7280$
Finalmente, el área de la parcela A es de 7280 u².

b) Gráficamente, el rectángulo R será:



Es un rectángulo de base $(40 - x)$ y altura $f(x)$.

El área de este rectángulo será: $A_R(x) = f(x)(40 - x) = 30\sqrt{2x+1}(40 - x)$

Obtenemos el máximo de A_R

$$A_R'(x) = 30 \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}(40 - x) + 30\sqrt{2x+1}(-1) = \frac{30(40 - x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$$

$$A_R'(x) = 0 \rightarrow \frac{30(40 - x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1} = 0 \rightarrow 30(40 - x) - 30(2x + 1) = 0 \rightarrow 40 - x - 2x - 1 = 0$$

$$39 - 3x = 0 \rightarrow 39 = 3x \rightarrow x = 13$$

Para determinar si $x = 13$ es máximo o mínimo estudiaremos el signo de $A_R'(x)$ a la izquierda y derecha de 13,

$$x = 10 \rightarrow A_R'(10) = \frac{30(40 - 10)}{\sqrt{2 \cdot 10 + 1}} - 30\sqrt{2 \cdot 10 + 1} = \frac{900}{\sqrt{21}} - 30\sqrt{21} = \frac{900 - 30 \cdot 21}{\sqrt{21}} = \frac{270}{\sqrt{21}} > 0$$

$$x = 20 \rightarrow A_R'(20) = \frac{30(40 - 20)}{\sqrt{2 \cdot 20 + 1}} - 30\sqrt{2 \cdot 20 + 1} = \frac{300}{\sqrt{41}} - 30\sqrt{41} = \frac{300 - 30 \cdot 41}{\sqrt{41}} = \frac{-930}{\sqrt{41}} < 0$$

Como a la izquierda de 13 la derivada es positiva, la función A_R es creciente; a la derecha de 13 la derivada es negativa, la función A_R es decreciente. Por lo tanto en $x = 13$ hay un máximo que, además, es máximo absoluto porque la función pasa de creciente a decreciente.

Obtenemos los vértices del rectángulo R para $x = 13$.

Sólo necesitamos calcular el valor de $f(13) = 30\sqrt{2 \cdot 13 + 1} = 30\sqrt{27} = 30 \cdot 3\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

Finalmente, los vértices del rectángulo R de área máxima son:

$$(13, 0), (13, 90\sqrt{3}), (40, 90\sqrt{3}) \text{ y } (40, 0)$$

c) El valor del área máxima la obtenemos calculando $A_R(13)$.

$$A_R(13) = 30\sqrt{2 \cdot 13 + 1}(40 - 13) = 30\sqrt{27} \cdot 27 = 810\sqrt{27} = 810 \cdot 3\sqrt{3} = 2430\sqrt{3}$$

El valor del área máxima es $2430\sqrt{3} \text{ u}^2$