

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria 2020-2021

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Reparto equitativo de acciones

Llamamos N_A, N_B, N_C al número total de acciones de las empresas A, B y C. Como la acción B vale 1 euro, la acción A vale 3 euros y la acción C vale 6 euros. Las condiciones sobre el número de acciones son $N_A + N_B + N_C = 540$ y $N_B = 2N_C$. La valoración total aporta la tercera ecuación:

$$\begin{cases} N_A + N_B + N_C = 540, \\ 3N_A + N_B + 6N_C = 1560, \\ N_B - 2N_C = 0. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 6 & 1560 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Como $\det M = 1 \neq 0$, hay una única distribución que satisface los datos. De la tercera ecuación $N_B = 2N_C$ y, usando la primera, $N_A = 540 - 3N_C$. Sustituimos en la ecuación del valor:

$$3(540 - 3N_C) + 2N_C + 6N_C = 1560 \implies 1620 - N_C = 1560 \implies N_C = 60.$$

Así, $N_A = 360$ y $N_B = 120$. Al repartir cada tipo de acción por igual entre los tres hermanos, dividimos estas cantidades entre 3:

$$\frac{360}{3} = 120, \quad \frac{120}{3} = 40, \quad \frac{60}{3} = 20.$$

Cada hermano recibe acciones por valor de $120 \cdot 3 + 40 \cdot 1 + 20 \cdot 6 = 520$ euros; los tres valores suman los 1560 euros indicados. **Conclusión.** A cada hermano le corresponden 120 acciones A, 40 acciones B y 20 acciones C.

A.2. Área entre dos parábolas

Para hallar el recinto primero buscamos los puntos de corte, igualando las funciones:

$$2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \iff 3x^2 - 5x - 2 = 0 \iff (3x + 1)(x - 2) = 0.$$

Las abscisas de intersección son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 2$. Entre ellas, por ejemplo en $x = 0$, se tiene $f(0) = 2 > g(0) = 0$; por tanto, f queda por encima de g en todo el intervalo. El área se calcula integrando función superior menos función inferior:

$$\mathcal{A} = \int_{-1/3}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1/3}^2 (2 + 5x - 3x^2) dx.$$

Una primitiva es $2x + \frac{5}{2}x^2 - x^3$. Aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[2x + \frac{5}{2}x^2 - x^3 \right]_{-1/3}^2 \\ &= 6 - \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{18} + \frac{1}{27} \right) = 6 + \frac{19}{54} = \frac{343}{54}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área del recinto es $\frac{343}{54}$ unidades cuadradas.

A.3. Ángulo, simetría y proyección de una recta

La recta r es la intersección de dos planos con vectores normales

$$\vec{n}_1 = (-1, -1, 1), \quad \vec{n}_2 = (2, 3, -1).$$

Su vector director es perpendicular a ambos; podemos obtenerlo mediante el producto vectorial:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1).$$

Para hallar el punto de intersección de r con π , resolvemos conjuntamente las tres ecuaciones. De $-x - y + z = 0$ se obtiene $z = x + y$. Al sustituir en π resulta $x = -3$, y la otra ecuación de r da $y = 1$, $z = -2$. Por tanto,

$$I = r \cap \pi = (-3, 1, -2).$$

a) Ángulo entre r y π

El plano π tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$. Si α es el ángulo agudo entre una recta de director $\vec{d}$ y un plano de normal $\vec{n}$, entonces

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|},$$

pues α es complementario del ángulo entre la recta y la normal. En este caso,

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2, \quad \|\vec{d}_r\| = \sqrt{6}, \quad \|\vec{n}_\pi\| = \sqrt{6}.$$

Así,

$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \implies \alpha = \text{arc sen} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 19,47^\circ.$$

Conclusión. El ángulo entre la recta y el plano es $\text{arc sen} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 19,47^\circ$.

b) Simétrico de I respecto al plano $z - y = 0$

El plano de simetría tiene vector normal $\vec{n} = (0, -1, 1)$. Para reflejar un punto X respecto al plano $\vec{n} \cdot X + D = 0$, se usa

$$X' = X - 2 \frac{\vec{n} \cdot X + D}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $I = (-3, 1, -2)$, $D = 0$, $\vec{n} \cdot I = -3$ y $\|\vec{n}\|^2 = 2$. Por ello,

$$I' = I - 2 \frac{-3}{2} (0, -1, 1) = (-3, 1, -2) + 3(0, -1, 1) = (-3, -2, 1).$$

Conclusión. El simétrico del punto de intersección es $I' = (-3, -2, 1)$.

c) Proyección ortogonal de r sobre π

La proyección de r pasa por I , porque I ya pertenece a π . Su dirección se obtiene proyectando $\vec{d}_r$ sobre el plano: se elimina la componente en la dirección normal $\vec{n}_\pi$:

$$\vec{d}_{\text{proy}} = \vec{d}_r - \frac{\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|^2} \vec{n}_\pi = (-2, 1, -1) - \frac{-2}{6} (2, 1, -1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right).$$

Podemos tomar como director el vector proporcional $(-1, 1, -1)$, que es paralelo a π . La proyección queda expresada en forma paramétrica:

$$r_\pi : \begin{cases} x = -3 - t, \\ y = 1 + t, \\ z = -2 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La proyección ortogonal de r sobre π es la recta paramétrica r_π .

A.4. Distribución normal y ensayos independientes

Sea T el tiempo de vida, medido en meses. Según el enunciado,

$$T \sim N(\mu = 8,8, \sigma = 3).$$

Para utilizar la tabla de la normal tipificamos con $Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$, que sigue una normal estándar $N(0, 1)$.

a) Porcentajes de individuos

Para superar los 10 meses, tipificamos el valor 10:

$$z = \frac{10 - 8,8}{3} = 0,4.$$

La tabla indica $\Phi(0,4) = P(Z < 0,4) = 0,6554$, por lo que

$$P(T > 10) = 1 - \Phi(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446.$$

Para el intervalo entre 7 y 10 meses, los valores tipificados son

$$z_1 = \frac{7 - 8,8}{3} = -0,6, \quad z_2 = 0,4.$$

Usando la simetría de la normal, $\Phi(-0,6) = 1 - \Phi(0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743$:

$$P(7 < T < 10) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,6) = 0,6554 - 0,2743 = 0,3811.$$

Conclusión. El 34,46 % supera los 10 meses y el 38,11 % vive entre 7 y 10 meses.

b) Al menos un espécimen no supera los 10 meses

La probabilidad de que un individuo supere los 10 meses es 0,3446. Para cuatro individuos independientes, la probabilidad de que los cuatro superen esa edad es el producto $0,3446^4$. Calculamos el complementario:

$$P(\text{al menos uno no supera 10}) = 1 - P(\text{los cuatro superan 10}) = 1 - (0,3446)^4 \approx 0,9859.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es aproximadamente 0,9859, es decir, un 98,59 %.

c) Intervalo central que contiene al 98 %

Buscamos c tal que el área central entre $8,8 - c$ y $8,8 + c$ sea 0,98. Al ser simétrico el intervalo, queda un 0,01 en cada cola. Si $z_{0,99}$ cumple $\Phi(z_{0,99}) = 0,99$, entonces

$$\frac{c}{3} = z_{0,99}.$$

La tabla da $z_{0,99} \approx 2,33$, así que

$$c \approx 3 \cdot 2,33 = 6,99 \text{ meses.}$$

Conclusión. El valor buscado es $c \approx 6,99$ meses.

B.1. Discusión de un sistema con parámetro

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante para identificar los valores del parámetro en los que puede cambiar el rango:

$$\det A = (a-1)(3a-26).$$

Si $a \neq 1, \frac{26}{3}$. El determinante es distinto de cero, luego $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene también rango 3 y, como hay tres incógnitas, Rouché-Frobenius concluye que el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$. La matriz de coeficientes tiene determinante nulo, pero su menor superior izquierdo de orden 2 vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) = 2$. En este caso la primera fila más la segunda fila es la tercera, tanto en la matriz de coeficientes como en la ampliada; así, $\text{rg}(A^*) = 2$. Los rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas, de modo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = \frac{26}{3}$. También se anula el determinante de A . El menor superior izquierdo de orden 2 vale $3a - 4 = 22 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. Para la matriz ampliada, tomamos el menor de las tres filas y las columnas correspondientes a x, y y los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} \frac{26}{3} & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{736}{3} \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $a \neq 1, \frac{26}{3}$, SCI si $a = 1$ e incompatible si $a = \frac{26}{3}$.

b) Resolución para $a = 1$

Con $a = 1$, el sistema queda

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ -2x + 3y - 6z = 2, \\ -x + y - 6z = 6. \end{cases}$$

La última ecuación es la suma de las dos primeras, por lo que no añade una condición nueva. De la primera, $x = 4 + 2y$; sustituyendo en la segunda:

$$-2(4 + 2y) + 3y - 6z = 2 \implies -y - 6z = 10 \implies y = -10 - 6z.$$

Tomamos $z = t$ como parámetro libre. Entonces $x = 4 + 2(-10 - 6t) = -16 - 12t$, y todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (-16 - 12t, -10 - 6t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones dadas por la familia anterior.

B.2. Continuidad, crecimiento e integral

La función es

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < 0, \\ xe^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Su dominio es $\mathbb{R}$: el seno, el producto xe^x y la función exponencial están definidos para todo número real.

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

Comprobamos primero la continuidad en el punto de empalme:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \operatorname{sen} 0 = 0, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0.$$

Los límites laterales coinciden con el valor de la función, por lo que es continua en 0.

Para estudiar la derivabilidad, calculamos las derivadas laterales. A la izquierda, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, de modo que $f'_-(0) = \cos 0 = 1$. A la derecha,

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1+x),$$

y por tanto $f'_+(0) = 1$. Como las derivadas laterales coinciden, f es derivable en 0 y $f'(0) = 1$. **Conclusión.** f es continua y derivable en $x = 0$.

b) Crecimiento y existencia de x_0

Para $x < 0$, $f'(x) = \cos x$. En $(-\pi, -\pi/2)$, $\cos x < 0$, mientras que en $(-\pi/2, 0)$, $\cos x > 0$. Para $x > 0$:

$$f'(x) = e^x(1+x) > 0.$$

Además, en $x = 0$ la derivada vale 1. Así, f decrece en $(-\pi, -\pi/2)$ y crece en $(-\pi/2, 2)$.

Para demostrar que existe $x_0 \in [0, 1]$ con $f(x_0) = 2$, usamos Bolzano en $[0, 1]$: f es continua allí y

$$f(0) = 0 < 2, \quad f(1) = e > 2.$$

Por tanto, $f(x) - 2$ cambia de signo en los extremos, y existe al menos un $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = 2$. **Conclusión.** f decrece en $(-\pi, -\pi/2)$, crece en $(-\pi/2, 2)$ y existe $x_0 \in [0, 1]$ con $f(x_0) = 2$.

c) Integral definida

Separamos la integral en $x = 0$, donde cambia la expresión de f :

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx = \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen} x dx + \int_0^1 xe^x dx.$$

Una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$. Para la segunda integral, usamos integración por partes con $u = x$, $dv = e^x dx$, de donde $du = dx$ y $v = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x.$$

Aplicamos Barrow a cada tramo:

$$\int_{-\pi/2}^0 \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^0 = -1, \quad \int_0^1 xe^x dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 1.$$

Conclusión. La integral definida vale $-1 + 1 = 0$.

B.3. Planos paralelos, recta y distancia

a) Planos paralelos a π_1 a distancia 2 del origen

El plano $\pi_1 : x + y = 1$ tiene vector normal $(1, 1, 0)$. Cualquier plano paralelo tiene la forma

$$\sigma_k : x + y - k = 0.$$

La distancia del origen a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(O, \sigma_k) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}.$$

Imponemos que la distancia sea 2:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |k| = 2\sqrt{2} \implies k = \pm 2\sqrt{2}.$$

Conclusión. Los dos planos buscados son $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ y $x + y + 2\sqrt{2} = 0$.

b) Recta por $(0, 2, 0)$ perpendicular a π_2

El vector normal de $\pi_2 : x + z = 1$ es $(1, 0, 1)$; como la recta debe ser perpendicular al plano, ese vector es su director. Por el punto $(0, 2, 0)$, la recta en forma paramétrica es

$$\ell : \begin{cases} x = t, \\ y = 2, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es ℓ en forma paramétrica.

c) Distancia entre las intersecciones con los ejes

El punto donde π_1 corta al eje x se obtiene poniendo $y = z = 0$: es $X = (1, 0, 0)$. Para el corte con el eje y , ponemos $x = z = 0$ y obtenemos $Y = (0, 1, 0)$. La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une:

$$\overrightarrow{XY} = Y - X = (-1, 1, 0), \quad d(X, Y) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

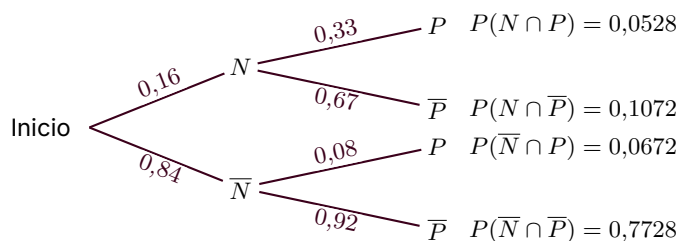
Conclusión. La distancia entre los puntos de corte es $\sqrt{2}$.

B.4. Probabilidad condicionada y sucesos independientes

Definimos N como «se supera el nivel permitido de NO_2 » y P como «se supera el nivel permitido de partículas». Los datos son

$$P(N) = 0,16, \quad P(P | N) = 0,33, \quad P(P | \bar{N}) = 0,08.$$

En el árbol, las probabilidades conjuntas al final de cada camino se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas sucesivas:



a) Probabilidad de superar ambos niveles

Solo el camino $N \cap P$ conduce a superar los dos niveles:

$$P(N \cap P) = P(N)P(P | N) = 0,16 \cdot 0,33 = 0,0528.$$

Conclusión. La probabilidad de superar ambos niveles en un día es 0,0528.

b) Probabilidad de superar al menos uno

El suceso «al menos uno» es $N \cup P$. Podemos sumar el camino N (tanto si se supera partículas como si no) y el camino $\bar{N} \cap P$:

$$P(N \cup P) = P(N) + P(\bar{N} \cap P) = 0,16 + 0,84 \cdot 0,08 = 0,16 + 0,0672 = 0,2272.$$

Conclusión. La probabilidad de superar al menos uno de los dos niveles es 0,2272.

c) Independencia

Si N y P fueran independientes, tendría que cumplirse $P(P | N) = P(P)$. Calculamos primero la probabilidad marginal de superar el nivel de partículas mediante los dos casos posibles de N :

$$P(P) = P(N)P(P | N) + P(\bar{N})P(P | \bar{N}) = 0,16 \cdot 0,33 + 0,84 \cdot 0,08 = 0,12.$$

Como $P(P | N) = 0,33 \neq 0,12 = P(P)$, no son independientes. **Conclusión.** Los sucesos N y P no son independientes.

d) Probabilidad de superar NO_2 sin superar partículas

Usamos probabilidad condicionada:

$$P(N | \bar{P}) = \frac{P(N \cap \bar{P})}{P(\bar{P})}.$$

Del árbol, $P(N \cap \bar{P}) = 0,1072$. Además, $P(\bar{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0,12 = 0,88$. Por tanto,

$$P(N | \bar{P}) = \frac{0,1072}{0,88} = \frac{67}{550} \approx 0,1218.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{67}{550} \approx 0,1218$.