

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ está definida para $x > 0$ y, en particular, es continua en $[1, e]$. Su derivada es

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}.$$

Como $x > 0$, la derivada es negativa para $1 \leq x < 2$ y positiva para $2 < x \leq e$. La función decrece en $[1, 2]$ y crece en $[2, e]$; por ello, $x = 2$ da el mínimo absoluto y relativo:

$$f(2) = 4 - 8 \ln 2.$$

Comparamos los extremos del intervalo:

$$f(1) = 1, \quad f(e) = e^2 - 8.$$

Como $f(1) > f(e)$, el máximo absoluto es 1, alcanzado en $x = 1$. En el interior del intervalo, el único extremo relativo es el mínimo en $x = 2$. Si se consideran vecindades relativas al dominio cerrado, los extremos $x = 1$ y $x = e$ también son máximos laterales.

La segunda derivada es

$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2} > 0 \quad (1 \leq x \leq e).$$

La función es convexa en todo $[1, e]$ y no tiene intervalos de concavidad.

Opción A - Ejercicio 2

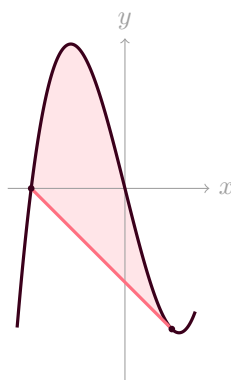
En $x = 1$, $f(1) = 1 - 4 = -3$ y $f'(1) = 3 - 4 = -1$. Por tanto, la recta tangente es

$$y + 3 = -(x - 1) \implies \boxed{y = -x - 2}.$$

Para hallar los cortes de esta recta con $f(x) = x^3 - 4x$, resolvemos

$$x^3 - 4x = -x - 2 \iff x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0.$$

Los puntos son $(-2, 0)$ y $(1, -3)$. Entre $x = -2$ y $x = 1$, la curva cúbica queda por encima de la recta porque $f(x) - (-x - 2) = (x - 1)^2(x + 2) \geq 0$. El esbozo muestra el recinto:



El área es

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^1 ((x^3 - 4x) - (-x - 2)) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \boxed{\frac{27}{4}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right).$$

Calculamos

$$\det A_k = k(k-2).$$

Si $k \neq 0, 2$, ambos rangos son 3, así que el sistema es compatible determinado. Para $k = 0$, la tercera fila de coeficientes es $R_1 - 3R_2$, pero los términos independientes no respetan la misma relación: $-1 - 3 \cdot 2 = -7 \neq 1$. Entonces $\text{rg}(A_0) = 2$ y $\text{rg}(A_0^*) = 3$, de modo que el sistema es incompatible.

Para $k = 2$, la tercera fila de coeficientes es $R_2 - R_1$ y su término independiente también cumple $2 - (-1) = 3$. Por tanto, $\text{rg}(A_2) = \text{rg}(A_2^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, tomamos $z = t$ y usamos las dos primeras ecuaciones:

$$2x + y + t = 2, \quad x + 3y + 2t = -1.$$

De aquí,

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{t}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3t}{5}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Las rectas tienen puntos $P = (-3, 9, 8)$ y $Q = (3, 9, 8)$, respectivamente, y vectores directores

$$\vec{v}_r = (-6, 4, 4), \quad \vec{v}_s = (3, -2, -2) = -\frac{1}{2}\vec{v}_r.$$

Por tanto, son paralelas. No coinciden, pues $Q - P = (6, 0, 0)$ no es proporcional al vector director. La distancia entre rectas paralelas es la longitud de la componente perpendicular de $Q - P$ respecto del director:

$$d(r, s) = \frac{\|(Q - P) \times \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|}.$$

Como $(Q - P) \times \vec{v}_r = (0, -24, 24)$,

$$d(r, s) = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{68}} = 12\sqrt{\frac{2}{17}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$ tiene dominio $\mathbb{R}$. Sus límites son

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Derivamos para hallar los extremos:

$$f'(x) = e^x(x^2 + x) = e^x x(x + 1).$$

Como $e^x > 0$, el signo de la derivada depende de $x(x + 1)$. Es positivo en $(-\infty, -1)$, negativo en $(-1, 0)$ y positivo en $(0, +\infty)$. Por tanto, hay un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$:

$$f(-1) = \frac{3}{e}, \quad f(0) = 1.$$

Los puntos de inflexión se obtienen de $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = e^x(x^2 + 3x + 1) = 0 \implies x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Igualamos las funciones para hallar sus cortes:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \iff 2x(x - 3) = 0.$$

Se cortan en $(0, 0)$ y $(3, 3)$. En $[0, 3]$, la parábola $g(x) = -x^2 + 4x$ queda por encima de $f(x) = x^2 - 2x$; por ejemplo, $g - f = -2x^2 + 6x > 0$ en el interior. El recinto limitado se encuentra entre estos dos puntos de corte. Su área es

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^3 ((-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)) \, dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = \boxed{9}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz A intercambia la primera y la tercera coordenadas; por ello $A^2 = I$ y $A^{-1} = A$. La ecuación dada queda

$$XA + A^3B = A \implies XA = A - AB.$$

Multiplicamos por $A^{-1} = A$ por la derecha:

$$X = (A - AB)A = I - ABA.$$

Calculamos por separado:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ABA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

En un rectángulo, los lados consecutivos son perpendiculares. El vector director de AB es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, -3).$$

La recta que contiene a C se expresa con parámetro t como

$$x = t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 2t - 1.$$

Para que BC sea perpendicular a AB , debe tener componente vertical nula; como $B_z = 2$, necesitamos $z_C = 2$. De $2t - 1 = 2$ obtenemos $t = \frac{3}{2}$, así que

$$C = \left(\frac{3}{2}, 3, 2\right).$$

En un paralelogramo, $A + C = B + D$, por lo que el cuarto vértice es

$$D = A + C - B = \left(\frac{3}{2}, 3, 5\right).$$