

Modelo 6 de 2004

Primitivas, estudio de funciones, sistemas y operaciones con matrices.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $(-1, +\infty)$. Integramos la derivada para hallar f :

$$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = -\frac{3}{x+1} + C.$$

La condición $f(2) = 0$ da $C = 1$, luego

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x+1}.$$

Una primitiva de f es

$$F(x) = \int \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) dx = x - 3 \ln(x+1) + K,$$

y $F(0) = 1$ implica $K = 1$. Por tanto, $F(x) = x - 3 \ln(x+1) + 1$. **Opción A - Ejercicio 2**

Desarrollamos el polinomio: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. En $x = 1$, $f(1) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, así que $f'(1) = -2$. Las rectas tangente y normal son

$$y = -2x + 2, \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Para la concavidad,

$$f''(x) = 6x - 4.$$

Se anula en $x = 2/3$, es negativa si $x < 2/3$ y positiva si $x > 2/3$. Hay un punto de inflexión en

$$\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right).$$

La gráfica es cóncava hacia abajo antes de $2/3$ y convexa después. **Opción A - Ejercicio 3**

La matriz de coeficientes tiene determinante $1 - m^2$. Si $m \neq \pm 1$, el determinante no es cero y el sistema es SCD. Para $m = 1$, las dos ecuaciones coinciden ($x - y = 1$), por lo que hay infinitas soluciones: $(x, y) = (1 + t, t)$. Para $m = -1$, las ecuaciones exigen a la vez $x + y = -1$ y $x + y = -3$, así que el sistema es incompatible. En resumen,

$$m \neq \pm 1 : \text{SCD}; \quad m = 1 : \text{SCI}; \quad m = -1 : \text{SI}.$$

Si además $x = 3$, la primera ecuación da $y = 3m - 1$. Al sustituirlo en la segunda,

$$3 - m(3m - 1) = 2m - 1 \iff 3m^2 + m - 4 = 0 \iff (m - 1)(3m + 4) = 0.$$

Por tanto, $m = 1$ o $m = -4/3$. Para $m = 1$, la familia compatible incluye $(3, 2)$. **Opción A - Ejercicio 4**

Obtenemos dos vectores del cuadrilátero mostrando las restas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 1, 3 - 2, 1 - 1) = (1, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0 - 2, 5 - 3, 3 - 1) = (-2, 2, 2).$$

Además, $\overrightarrow{CD} = (-1, -1, 0) = -\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DA} = (2, -2, -2) = -\overrightarrow{BC}$; por tanto es un paralelogramo. Los dos lados consecutivos son perpendiculares, pues

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 + 2 = 0,$$

por lo que es un rectángulo. Un vector normal al plano es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (2, -2, 4)$, proporcional a $(1, -1, 2)$. Usando $A = (1, 2, 1)$,

$$(x - 1) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0 \implies x - y + 2z - 1 = 0.$$

Las longitudes de los lados son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{12}$, así que el área es $2\sqrt{6}$.

Opción B - Ejercicio 1

La continuidad en $x = 0$ exige que el límite por la izquierda, 3, coincida con el valor del segundo tramo, a . Luego $a = 3$. Para comprobar derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = (2x - 4)|_0 = -4, \quad f'_+(0) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \Big|_0 = -3.$$

Como no coinciden, f no es derivable en 0. En $-1 < x < 0$, $f'(x) = 2x - 4 < 0$. Para $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2},$$

que es negativa en $(0, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$. Así, f decrece en $(-1, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. En $x = 1$ alcanza el mínimo absoluto $f(1) = 2$. **Opción B - Ejercicio 2**

Las intersecciones satisfacen $x^2 = bx$, es decir, $x = 0$ o $x = b$. Como $b > 0$, la recta está por encima de la parábola en $(0, b)$. El área es

$$\frac{9}{2} = \int_0^b (bx - x^2) dx = \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{6}.$$

De aquí $b^3 = 27$ y, usando $b > 0$, $\boxed{b = 3}$. **Opción B - Ejercicio 3**

Las dimensiones son A de orden 2×3 , y B, C de orden 3×2 . Multiplicamos fila por columna:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Calculando las transpuestas y multiplicando en el orden solicitado,

$$A^t B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}},$$

$$C^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Las matrices A, B, C no son cuadradas, así que no tienen inversa. En cambio, $AB = I_2$, cuya inversa es ella misma: $\boxed{(AB)^{-1} = I_2}$. **Opción B - Ejercicio 4**

Buscamos un vector de la forma $w = \alpha u + \beta v$, pues así queda en el plano generado por u, v . La condición $w \perp v$ exige $w \cdot v = 0$. Como $u \cdot v = -2$ y $v \cdot v = 2$,

$$-2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha.$$

Por tanto, $w = \alpha(u + v) = \alpha(1, 1, 1)$. Para que sea unitario, su módulo debe ser uno, luego $|\alpha|\sqrt{3} = 1$. Una respuesta es

$$\boxed{w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)};$$

la opuesta también cumple las condiciones.