

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de 2026

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Probabilidad condicionada

Definimos L : «el alumno vive en la localidad del centro»; F : «vive en un pueblo de alrededor»; T : «llega tarde», y P : «llega puntual». Del enunciado,

$$P(L) = 0,85, \quad P(F) = 0,15, \quad P(T | L) = 0,05, \quad P(P | F) = 0,75.$$

Como puntual y tarde son sucesos complementarios, $P(P | L) = 0,95$ y $P(T | F) = 0,25$. La probabilidad conjunta de cada camino se calcula multiplicando las probabilidades de sus ramas.

a) Porcentaje de alumnos que llegan tarde

Los dos casos que pueden conducir a llegar tarde son vivir en la localidad y vivir fuera. Son incompatibles, así que sumamos sus probabilidades conjuntas:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(L)P(T | L) + P(F)P(T | F) \\ &= 0,85 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,25 \\ &= 0,0425 + 0,0375 = 0,08. \end{aligned}$$

Conclusión. El 8 % del alumnado llega tarde a primera hora.

b) Probabilidad de que viva fuera sabiendo que ha llegado puntual

Aplicamos la fórmula de probabilidad condicionada. El numerador corresponde a vivir fuera y llegar puntual; en el denominador sumamos todos los casos puntuales:

$$\begin{aligned} P(F | P) &= \frac{P(F \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{0,15 \cdot 0,75}{0,15 \cdot 0,75 + 0,85 \cdot 0,95} \\ &= \frac{0,1125}{0,92} = \frac{45}{368} \approx 0,1223. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad es $\frac{45}{368}$, aproximadamente un 12,23 %.

Pregunta 2 - Áreas de la bandera

La curva es $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ en el rectángulo $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 2$. El área blanca, situada encima de la curva, es el área bajo $\sqrt[3]{x}$:

$$A_{\text{blanca}} = \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^8 = 12.$$

El área total bajo la curva, que se reparte entre verde y rojo, es

$$A_{\text{inferior}} = \int_0^8 (2 - \sqrt[3]{x}) dx = 16 - 12 = 4.$$

Sea (x, y) el vértice superior derecho del rectángulo verde. Está en la curva, por lo que $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ y $0 \leq x \leq 8$. El área verde es

$$G(x) = xy = x(2 - \sqrt[3]{x}) = 2x - x^{4/3}.$$

El área roja es $4 - G(x)$; minimizarla equivale a maximizar G . Buscamos los puntos críticos y comprobamos la segunda derivada:

$$G'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{1/3} = 0 \implies x^{1/3} = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{27}{8},$$

$$y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad G''(x) = -\frac{4}{9}x^{-2/3} < 0 \quad (x > 0).$$

Por tanto, el área verde máxima es $\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16}$. Además, $G(0) = G(8) = 0$ y $G(27/8) = 27/16 > 0$, así que este punto crítico da el máximo absoluto en $[0, 8]$. El área roja mínima vale

$$A_{\text{roja}} = 4 - \frac{27}{16} = \frac{37}{16}.$$

Conclusión. Las áreas son: blanca 12, verde $\frac{27}{16}$ y roja mínima $\frac{37}{16}$ unidades cuadradas.

Pregunta 3 - Ecuación matricial y determinantes

Se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Resolver $AX + X = B$

Sacamos factor común X por la derecha: $(A+I)X = B$. Como $A+I$ es invertible, multiplicamos por su inversa por la izquierda:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A + I) = 8 \neq 0,$$
$$X = (A + I)^{-1}B.$$

Reducimos la matriz ampliada de $A + I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1/2, F_2 \leftarrow F_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora aplicamos $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$, $F_3 \leftarrow F_3/2$ y $F_1 \leftarrow F_1 - \frac{1}{2}F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Así,

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y al multiplicar por B obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b1) Determinante de $(2C)^{100}$

La matriz C es triangular inferior, por lo que su determinante es el producto de los elementos diagonales: $\det C = 1$. Para una matriz de orden 3 se cumple $\det(2C) = 2^3 \det C$, y para una potencia, $\det(M^{100}) = (\det M)^{100}$. Entonces

$$\det((2C)^{100}) = (2^3 \det C)^{100} = 8^{100} = 2^{300}.$$

Conclusión. El determinante solicitado es 2^{300} .

b2) Invertibilidad de A y AB

Calculamos el determinante de A :

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, A es invertible. En cambio, A es de orden 3×3 y B es de orden 3×2 , así que AB tiene orden 3×2 . Una matriz no cuadrada no tiene inversa en el sentido usual. **Conclusión.** A es invertible y AB no es invertible porque no es cuadrada.

Pregunta 4 - Geometría en el espacio

4.1 a) Posición relativa de r_1 y r_2

De las ecuaciones paramétricas,

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = s, \\ z = 0, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Igualando coordenadas, $1 + t = 1 + s$ y $1 = s$, luego $s = t = 1$ y el punto de corte es $A = (2, 1, 0)$. **Conclusión.** Las rectas son secantes y se cortan en $A = (2, 1, 0)$.

4.1 b) Una recta r_3 que forma el triángulo pedido

En r_2 elegimos $C = (1, 0, 0)$ (corresponde a $s = 0$). Con $A = (2, 1, 0)$, la hipotenusa AC mide

$$|AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Tomamos $B = (1, 1, 0)$, que pertenece a r_1 (para $t = 0$). Los vectores de los catetos son

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 1, 0) - (1, 1, 0) = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0).$$

Su producto escalar es cero, de modo que el ángulo en B es recto. Como r_3 pasa por B y C , podemos tomar como vector director $C - B = (0, -1, 0)$ o el proporcional $(0, 1, 0)$. Por tanto, su forma paramétrica es:

$$r_3 : \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + u, \\ z = 0, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta paramétrica r_3 obtenida cumple ambas condiciones.

4.2 a) Longitud de la arista y volumen del cubo

La cara del cubo está en $\pi : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Las aristas que unen esa cara con la cara opuesta son perpendiculares a π y tienen la longitud del lado; por tanto, la distancia de $P = (1, 2, 1)$ al plano es la arista del cubo. Usamos la fórmula punto-plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

Así, el lado del cubo es $2/3$ y su volumen es

$$V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Conclusión. La longitud de la arista es $\frac{2}{3}$ y el volumen es $\frac{8}{27}$ unidades cúbicas.

4.2 b) Otro vértice del cubo

El vector normal de π es $\vec{n} = (2, -2, 1)$ y el valor de $F(P)$ para $F(x, y, z) = 2x - 2y + z - 1$ es -2 . El vértice de la cara situado bajo P es el pie de la perpendicular:

$$Q = P - \frac{F(P)}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 2, 1) - \frac{-2}{9} (2, -2, 1) = \left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right).$$

Se comprueba que Q pertenece a π y que $PQ = 2/3$, la longitud de la arista. **Conclusión.** Un vértice del cubo distinto de P es $Q = \left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

Pregunta 5 - Análisis e integración

5.1 Dominio, monotonía y extremo de $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Para que exista el logaritmo se necesita $x > 0$, y además el denominador no puede ser cero. Como $\ln x = 0$ cuando $x = 1$,

$$D_f = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

En el dominio, el denominador es positivo, así que el signo depende de $\ln x - 1$. Este numerador se anula en $x = e$. Para $0 < x < 1$, $\ln x < 0$; para $1 < x < e$, $0 < \ln x < 1$; y para $x > e$, $\ln x > 1$. Por tanto,

Intervalo	$(0, 1)$	$(1, e)$	(e, ∞)
Signo de $f'(x)$	-	-	+
Comportamiento	decreciente	decreciente	creciente

La derivada cambia de negativa a positiva al pasar por $x = e$, así que allí hay un mínimo relativo. Su ordenada es $f(e) = e$. **Conclusión.** f decrece en $(0, 1)$ y $(1, e)$, crece en (e, ∞) y tiene un mínimo relativo en (e, e) . No hay máximo relativo.

5.2 Valor de a en la integral

Integramos por partes, tomando $u = x - a$ y $dv = \sin(3x) dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -\cos(3x)/3$:

$$\int (x - a) \sin(3x) dx = -\frac{(x - a) \cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow en $[0, \pi/3]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (x - a) \sin(3x) dx &= \left[-\frac{(x - a) \cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

Igualamos al valor indicado en el enunciado y despejamos a :

$$\frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3} = \frac{2\pi}{9} \implies a = -\frac{\pi}{6}.$$

Conclusión. El valor real buscado es $a = -\frac{\pi}{6}$.