

Extraordinaria de reserva de 2021

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

La inflexión en $(0, 4)$ da $f(0) = d = 4$ y $f''(0) = 2b = 0$, luego $b = 0$. La normal en $(1, 8)$ es paralela al eje y , así que la tangente es horizontal: $f'(1) = 3a + c = 0$. Además, $f(1) = a + c + 4 = 8$. Resolviendo, $a = -2$ y $c = 6$. Por tanto, $\boxed{a = -2, b = 0, c = 6, d = 4}$.

Ejercicio 2

El dominio excluye $x = -3, 1$. Se factoriza el denominador como $(x + 3)(x - 1)$; el numerador no se anula en esos puntos, por lo que ambos son asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado y coeficiente principal, la asíntota horizontal es $y = 1$.

La derivada se simplifica a

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x+5)}{(x+3)^2(x-1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio, así que el signo depende de $(x+2)(x+5)$. La función crece en $(-\infty, -5)$ y $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$; decrece en $(-5, -3)$ y $(-3, -2)$. Hay máximo relativo en $x = -5$ y mínimo en $x = -2$.

Ejercicio 3

La tangente a e^x en $x = a$ es $y = e^a + e^a(x - a) = e^a(x - a + 1)$. Para que pase por el origen debe cumplirse $a = 1$. En ese punto la tangente es $y = ex$. En $[0, 1]$, la exponencial queda por encima de su tangente, así que el área con el eje de ordenadas es

$$S = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \boxed{\frac{e}{2} - 1}.$$

Ejercicio 4

El polinomio $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ cambia de signo en 1 y 2. Por ello,

$$\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx.$$

Evaluando con $x^3/3 - 3x^2/2 + 2x$, los dos términos valen $1/6$ y $5/6$. La integral resulta $\boxed{1}$.

Ejercicio 5

Para una matriz 3×3 , $\det(2A^3) = 2^3(\det A)^3$. Como $\det A = 5$,

$$\det(2A^3) = 8 \cdot 5^3 = 1000.$$

Al desarrollar el primer determinante y agrupar los términos se obtiene $-6(3ae - 2af - 3bd + bf + 2cd - ce)$. La expresión entre paréntesis es $\det A = 2$, así que el determinante pedido vale $-6 \det A = -12$.

En el segundo, las columnas son $2(C_1 - C_2)$, C_3 y C_2 , donde C_i son las columnas de A . Sacar el factor 2 y permutar las dos últimas columnas da $-2 \det A = -4$.

Ejercicio 6

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m & | & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & | & 1 \\ 2 & m & m & | & 2 \end{pmatrix},$$

y $\det A = -m(m-1)$. Si $m \neq 0, 1$, es SCD. Para $m = 0$ o $m = 1$, el rango de A es 2 y el de A^* también es 2, menor que el número de incógnitas: el sistema es SCL. Para $m = 1$, las ecuaciones se reducen a $x + y + z = 1$ y $x + 2y + 2z = 1$, por lo que $x = 1$ e $y + z = 0$. Así, una descripción de las soluciones es $(1, t, -t)$.

Ejercicio 7

Los planos paralelos a $2x - y + z = 0$ tienen forma $2x - y + z + D = 0$. Su distancia al plano dado es $|D|/\sqrt{6}$. Al igualarla a $\sqrt{6}$, queda $D = \pm 6$; las ecuaciones son $2x - y + z + 6 = 0$ y $2x - y + z - 6 = 0$.

Para el simétrico de $P = (1, 2, 6)$ respecto de π , el numerador de la proyección es $2(1) - 2 + 6 = 6$, igual a $|\vec{n}|^2$ para $\vec{n} = (2, -1, 1)$. El pie es $H = P - \vec{n} = (-1, 3, 5)$ y el simétrico $P' = 2H - P = (-3, 4, 4)$.

Ejercicio 8

Un punto de r es $(0, 1, -1)$ y su director es $(-1, 2, 1)$. Escribimos $X(t) = (-t, 1 + 2t, -1 + t)$. La condición $|X - B|^2 = |X - C|^2$ se simplifica a $t = -1$, así que un punto pedido es $(1, -1, -2)$.

Para el triángulo BCD , los vectores son $C - B = (1, 1, -2)$ y $D - B = (2, -1, -1)$. Su producto vectorial es $(-3, -3, -3)$, de módulo $3\sqrt{3}$. El área es la mitad:

$$\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$