

Julio de 2013 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven las dos opciones del examen. En cada apartado se explica qué se busca y se desarrollan los cálculos.

Opción A · Problema A.1

a) Conmutatividad y potencias

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden y supongamos que $AB = BA$. Por definición, $A^2B^2 = AAB B$. Como $BA = AB$, podemos intercambiar los dos factores centrales:

$$A^2B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2.$$

Por tanto, la conmutatividad permite concluir que

$$\boxed{A^2B^2 = (AB)^2}.$$

b) Comprobar la relación y hallar la inversa

La matriz del enunciado es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su cuadrado mediante el producto de matrices:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)(-4) + 10(-3) & (-4)(10) + 10(7) \\ 0 & (-3)(-4) + 7(-3) & (-3)(10) + 7(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos en la expresión que hay que comprobar:

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = O.$$

Así queda verificado que $A^2 - 3A + 2I = O$.

La misma identidad prueba que cualquier matriz cuadrada A que la cumpla es invertible. En efecto,

$$A(3I - A) = 3A - A^2 = 3A - (3A - 2I) = 2I.$$

Como $3I - A$ es un polinomio en A , conmuta con A ; por ello también $(3I - A)A = 2I$. Dividiendo entre 2, obtenemos la inversa:

$$A^{-1} = \frac{3I - A}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}}.$$

c) Encontrar α y β

Partimos de la relación ya demostrada:

$$A^2 - 3A + 2I = O \implies A^2 = 3A - 2I.$$

Multiplicamos por A y volvemos a sustituir A^2 :

$$A^3 = A(3A - 2I) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I.$$

Al comparar con $A^3 = \alpha A + \beta I$, resulta

$$\boxed{\alpha = 7, \beta = -6}.$$

Opción A - Problema A.2

Las rectas vienen dadas en forma paramétrica:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha, \\ y = \alpha, \\ z = 2 - \alpha, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1, \\ y = 1 + \beta, \\ z = -1 - 2\beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Ecuaciones implícitas de r_1

De $y = \alpha$ se obtiene $\alpha = y$. Sustituimos en las ecuaciones de x y z :

$$x = 1 + 2y \implies x - 2y - 1 = 0, \quad z = 2 - y \implies y + z - 2 = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones implícitas solicitadas son

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Para identificar su dirección, conservamos también su forma paramétrica: un punto es $(1, 0, 2)$ y un vector director es $u = (2, 1, -1)$.

b) Justificar que están en un plano y hallar su ecuación general

Para saber si las rectas se cortan, igualamos sus coordenadas. De las coordenadas x , $1 + 2\alpha = -1$, luego $\alpha = -1$. La coordenada y da $-1 = 1 + \beta$, luego $\beta = -2$. Comprobamos la coordenada z :

$$z_{r_1} = 2 - (-1) = 3, \quad z_{r_2} = -1 - 2(-2) = 3.$$

Así, se cortan en $R = (-1, -1, 3)$. Sus vectores directores $u = (2, 1, -1)$ y $v = (0, 1, -2)$ no son proporcionales; por tanto, las rectas determinan un único plano.

Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 4, 2).$$

La ecuación general de un plano con normal $n = (a, b, c)$ que pasa por $R = (x_0, y_0, z_0)$ es $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Sustituimos:

$$-(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \implies \boxed{\pi : -x + 4y + 2z - 3 = 0}.$$

c) Área del triángulo PQR

El enunciado da $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, y el tercer vértice es el punto de corte $R = (-1, -1, 3)$. El área de un triángulo formado por dos lados $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ se calcula como la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\text{Área}(PQR) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right|.$$

Calculamos primero los lados:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{PR} = R - P = (0, -1, 2).$$

Entonces

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -2, -1),$$

$$|(3, -2, -1)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Por tanto, el área del triángulo es $\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$.

Opción A - Problema A.3

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad g(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

a) Derivadas

Usamos $\ln \sqrt{u} = \frac{1}{2} \ln u$, válida cuando $u > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)).$$

Derivamos término a término, aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

De igual forma,

$$g(x) = \frac{1}{2} (\ln(1-x) - \ln(1+x)), \quad g'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = -\frac{1}{1-x^2}.$$

b) Dominios y comportamiento

El logaritmo solo está definido si su argumento es positivo; además, los denominadores no pueden anularse. Para f :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0.$$

Los puntos que separan los signos son $x = -1$ y $x = 1$. La fracción es positiva exactamente entre ellos; en los extremos no está definida y fuera de ese intervalo es negativa. Para g aparece la fracción recíproca, con el mismo intervalo de positividad. Así,

$$D_f = D_g = (-1, 1).$$

En este dominio, $1 - x^2 > 0$. Las derivadas no se anulan: por ejemplo, en el punto de prueba $x = 0$,

$$f'(0) = 1 > 0, \quad g'(0) = -1 < 0.$$

Por tanto, f crece estrictamente en $(-1, 1)$ y g decrece estrictamente en ese intervalo. Los extremos $x = -1$ y $x = 1$ no pertenecen al dominio, así que no son puntos críticos ni extremos de estas funciones.

Función	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$ (prueba $x = 0$)	$x = 1$	$x > 1$
f'	Fuera del dominio	No definida	+: creciente	No definida	Fuera del dominio
g'	Fuera del dominio	No definida	-: decreciente	No definida	Fuera del dominio

Comprobamos también las asíntotas. En los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty.$$

Por ello, $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales (unilaterales) de ambas funciones. No hay asíntotas horizontales ni oblicuas: sus dominios están acotados y no permiten estudiar límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

c) Suma y recorrido

Sumamos usando las formas logarítmicas y $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, para $a, b > 0$:

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \ln(1) = 0, \quad -1 < x < 1.$$

La suma es la función constante de valor 0 en su dominio común $(-1, 1)$. Su recorrido es, por tanto,

$$f(x) + g(x) = 0, \quad \text{Im}(f+g) = \{0\}.$$

Al ser constante, todos los puntos $x \in (-1, 1)$ son a la vez máximos y mínimos globales de la función suma. En la suma, las divergencias de f y g se cancelan: los límites laterales en $x = -1$ y $x = 1$ valen 0. Por eso no hay asíntotas verticales; tampoco horizontales ni oblicuas, pues el dominio está acotado.

Opción B · Problema B.1

El sistema es

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1. \end{cases}$$

Escribimos su matriz de coeficientes A y su matriz ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Determinante y casos

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(\alpha - 5) - (1 - 3) + (5 - 3\alpha) \\ &= \alpha^2 - 8\alpha + 7 = (\alpha - 1)(\alpha - 7). \end{aligned}$$

Si $\det A \neq 0$, entonces $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene solo tres filas, así que también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché–Frobenius el sistema es compatible determinado (SCD). Quedan por estudiar por separado los casos en que el determinante vale cero:

$$(\alpha - 1)(\alpha - 7) = 0 \implies \alpha = 1 \text{ o } \alpha = 7.$$

a) Todas las soluciones cuando $\alpha = 7$

Sustituimos $\alpha = 7$:

$$A_7 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

El menor de las dos primeras filas y columnas x, y es

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 1 = 48 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_7) \geq 2$. Además,

$$(3, 5, 1 | 1) = \frac{1}{3}(7, 1, 1 | 1) + \frac{2}{3}(1, 7, 1 | 1),$$

de modo que la tercera fila de la ampliada depende de las dos primeras. Así,

$$\text{rg}(A_7) = \text{rg}(A_7^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché–Frobenius el sistema es compatible indeterminado (SCI), con una incógnita libre. Restando las dos primeras ecuaciones se obtiene $x = y$; ponemos $x = y = t$. La primera ecuación da $8t + z = 1$, es decir, $z = 1 - 8t$. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (t, t, 1 - 8t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Valores de α para los que el sistema es SCI

Para $\alpha = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Las dos primeras filas coinciden, luego los rangos son como máximo 2. El menor formado por las filas 1 y 3 y las columnas x, z vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A_1) = 2$. En la ampliada las dos primeras filas siguen coincidiendo y la tercera es independiente; por tanto $\text{rg}(A_1^*) = 2$. Rouché–Frobenius da $2 = 2 < 3$: también es SCI. Restamos la primera ecuación de la tercera:

$$(3x + 5y + z) - (x + y + z) = 0 \implies 2x + 4y = 0 \implies x + 2y = 0.$$

Tomamos $y = t$; entonces $x = -2t$, y la primera ecuación da $z = 1 + t$. Para este caso, las soluciones son $(-2t, t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, reuniendo los dos casos de rango 2:

El sistema es SCI exactamente para $\alpha = 1$ o $\alpha = 7$.

c) Valores de α para los que el sistema es SCD

Si $\alpha \neq 1, 7$, entonces $\det A = (\alpha - 1)(\alpha - 7) \neq 0$. En consecuencia,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3,$$

y el sistema es SCD por Rouché–Frobenius. Por tanto,

El sistema es SCD para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 7\}$.

No hay valores de α para los que el sistema sea incompatible.

Opción B · Problema B.2

Las rectas se dan como intersección de planos y en forma simétrica. Las transformamos a forma paramétrica para identificar sus puntos y vectores directores:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + z = 1, \end{cases} \quad s : x - 1 = y - 2 = z.$$

a) Un punto y un vector director de cada recta

Para r , ponemos $z = 3t$. De la primera ecuación, $y = x + 3t$. Sustituimos en la segunda:

$$2x + (x + 3t) + 3t = 1 \implies x = \frac{1}{3} - 2t, \quad y = \frac{1}{3} + t.$$

Así, en forma paramétrica,

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 2t, \\ y = \frac{1}{3} + t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un punto de r es $P_r = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ y un vector director es $u = (-2, 1, 3)$.

Para s , igualamos las tres expresiones a un parámetro q :

$$x - 1 = q, \quad y - 2 = q, \quad z = q.$$

Por tanto,

$$s : \begin{cases} x = 1 + q, \\ y = 2 + q, \\ z = q, \end{cases} \quad q \in \mathbb{R},$$

con punto $P_s = (1, 2, 0)$ y vector director $v = (1, 1, 1)$.

b) Posición relativa y distancia

Primero comprobamos que las direcciones no son paralelas:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -3) \neq (0, 0, 0).$$

Para distinguir si son secantes o cruzadas, calculamos el producto mixto. Si no es cero, las rectas no son coplanarias:

$$P_s - P_r = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right), \quad (P_s - P_r) \cdot (u \times v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) \cdot (-2, 5, -3) = -\frac{4}{3} + \frac{25}{3} = 7 \neq 0.$$

Luego r y s son rectas cruzadas.

La distancia entre dos rectas cruzadas se obtiene con

$$d(r, s) = \frac{|(P_s - P_r) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}.$$

El denominador es

$$|u \times v| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}.$$

Al sustituir, resulta

$$d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{38}}.$$

c) Recta perpendicular a las dos rectas que pasa por el punto dado

Una dirección perpendicular a ambas rectas es el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-2, 5, -3)$, pues

$$(-2, 5, -3) \cdot (-2, 1, 3) = 4 + 5 - 9 = 0, \quad (-2, 5, -3) \cdot (1, 1, 1) = -2 + 5 - 3 = 0.$$

El punto del enunciado es $Q = (\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0)$. La recta paramétrica que pasa por Q con esa dirección es

$$t : \begin{cases} x = \frac{41}{57} - 2\lambda, \\ y = -\frac{14}{57} + 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = -3\lambda, \end{cases}$$

Opción B · Problema B.3

En el intervalo $0 \leq x \leq 40$, el borde del río está descrito por

$$f(x) = 30\sqrt{2x+1}.$$

Como $2x+1 \geq 1 > 0$ en todo el intervalo, la raíz está definida y $f(x) \geq 0$. El rectángulo con esquina inferior izquierda $(x, 0)$ y lado derecho en $x = 40$ tiene anchura $40 - x$ y altura $f(x)$.

a) Área de la parcela

El área bajo una curva no negativa entre $x = 0$ y $x = 40$ es la integral definida:

$$\mathcal{A} = \int_0^{40} f(x) dx = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1} dx.$$

Para desarrollar la integral, hacemos $u = 2x+1$, de modo que $du = 2 dx$ y $dx = \frac{1}{2} du$:

$$\int 30(2x+1)^{1/2} dx = 15 \int u^{1/2} du = 15 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = 10u^{3/2} = 10(2x+1)^{3/2}.$$

Evaluamos en los extremos del intervalo:

$$\mathcal{A} = \left[10(2x+1)^{3/2} \right]_0^{40} = 10(81^{3/2}) - 10(1^{3/2}) = 10(729) - 10 = \boxed{7280 \text{ unidades}^2}.$$

b) Vértices del rectángulo de área máxima

Si la esquina izquierda está en x , la anchura es $40 - x$ y la altura es $f(x)$. Por ello, el área que queremos maximizar es

$$\mathcal{A}_R(x) = (40 - x)f(x) = 30(40 - x)\sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 40.$$

El dominio es el intervalo cerrado $[0, 40]$: fuera de él el rectángulo no cabe en la parcela. Derivamos con la regla del producto:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_R(x) &= 30 \left[-\sqrt{2x + 1} + (40 - x) \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \right] \\ &= 30 \frac{-(2x + 1) + (40 - x)}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{90(13 - x)}{\sqrt{2x + 1}}.\end{aligned}$$

El denominador es positivo en todo $[0, 40]$. Igualamos la derivada a cero:

$$90(13 - x) = 0 \implies x = 13.$$

Comprobamos el signo a ambos lados con valores de prueba del dominio:

$$\mathcal{A}'_R(0) = \frac{90 \cdot 13}{1} > 0, \quad \mathcal{A}'_R(20) = \frac{90(-7)}{\sqrt{41}} < 0.$$

Intervalo o punto	$[0, 13)$	13	$(13, 40]$
-------------------	-----------	----	------------

Signo de $\mathcal{A}'_R$	+	0	-
---------------------------	---	---	---

Comportamiento	Crece	Máximo	Decrece
----------------	-------	--------	---------

Como el área crece antes de 13 y decrece después, alcanza allí su máximo global en el intervalo. La altura es

$$f(13) = 30\sqrt{2 \cdot 13 + 1} = 30\sqrt{27} = 90\sqrt{3}.$$

En consecuencia, los cuatro vértices del rectángulo son

$$(13, 0), (13, 90\sqrt{3}), (40, 90\sqrt{3}), (40, 0).$$

c) Valor del área máxima

Sustituimos $x = 13$ en la expresión del área. La anchura es $40 - 13 = 27$ y la altura es $90\sqrt{3}$. Por tanto, el área máxima es $\boxed{2430\sqrt{3} \text{ unidades}^2}$.