

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2017

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Continuidad, límites e integral

La función es

$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x}, & x < 0, \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

El primer tramo está definido para $x < 0$ y, en el segundo, $x+1 > 0$ y $x+1 \neq 0$ para todo $x \geq 0$. Por tanto, $D_f = \mathbb{R}$.

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

Para la continuidad comparamos los límites laterales con el valor de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{2x} = 0, \quad f(0) = \frac{\ln 1}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0.$$

Los tres valores coinciden, así que f es continua en 0. Para la derivabilidad, calculamos las derivadas de cada tramo:

$$\frac{d}{dx}(xe^{2x}) = e^{2x}(1+2x), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Al tomar los límites laterales en 0 se obtiene $f'_-(0) = 1$ y $f'_+(0) = 1$. Como coinciden y la función es continua, es derivable en ese punto. **Conclusión.** f es continua y derivable en $x = 0$, con $f'(0) = 1$.

b) Límites en los extremos

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la exponencial e^{2x} tiende a cero más rápidamente de lo que $|x|$ crece, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0.$$

Para $x \rightarrow +\infty$ usamos el segundo tramo. La regla de L'Hôpital permite evaluar el cociente $\ln(x+1)/(x+1)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x+1)}{1} = 0.$$

Conclusión. Ambos límites valen 0.

c) Integral definida

En el intervalo $[-1, 0]$ se utiliza el tramo xe^{2x} . Integramos por partes con $u = x$ y $dv = e^{2x} dx$, de modo que $du = dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Aplicando la regla de Barrow,

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2} = \frac{3-e^2}{4e^2}.$$

Conclusión. La integral definida es $\frac{3-e^2}{4e^2}$.

Opción A - Ejercicio 2. Rectas y plano en el espacio

a) Posición relativa de r_1 y r_2

Convertimos las rectas a forma paramétrica. En r_1 , al sumar sus ecuaciones resulta $y = 4x - 1$ y, al restarlas, $z = 2x$. Tomando $x = t$,

$$r_1: \quad x = t, \quad y = 4t - 1, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En r_2 , al restar las ecuaciones obtenemos $y = -z$ y, al sustituirlo en una de ellas, $x + z = 1$. Tomando $z = u$,

$$r_2: \quad x = 1 - u, \quad y = -u, \quad z = u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores son $\vec{d}_1 = (1, 4, 2)$ y $\vec{d}_2 = (-1, -1, 1)$, que no son proporcionales. Para decidir si son coplanarias usamos el producto mixto. Tomamos $P_1 = (0, -1, 0) \in r_1$ y $P_2 = (1, 0, 0) \in r_2$; entonces $\overrightarrow{P_1 P_2} = (1, 1, 0)$ y

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (6, -3, 3), \quad \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) = 3 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo indica que no están en un mismo plano. Al no ser paralelas ni coplanarias, son rectas alabeadas. **Conclusión.** r_1 y r_2 son alabeadas.

b) Distancia entre las rectas

Para dos rectas alabeadas de vectores directores $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ y puntos P_1, P_2 , la distancia es

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)|}{\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\|}.$$

Ya tenemos el producto mixto igual a 3 y $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (6, -3, 3)$, cuyo módulo es $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. Sustituimos:

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Conclusión. La distancia entre r_1 y r_2 es $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

c) Plano que contiene a r_1 y a $P = (1, 2, 3)$

Tomamos un punto de r_1 , por ejemplo $P_1 = (0, -1, 0)$, su vector director $\vec{d}_1 = (1, 4, 2)$ y el vector que une ese punto con el punto dado:

$$\overrightarrow{P_1 P} = P - P_1 = (1 - 0, 2 - (-1), 3 - 0) = (1, 3, 3).$$

Un vector normal del plano es el producto vectorial de estos dos vectores:

$$\vec{n} = \vec{d}_1 \times \overrightarrow{P_1 P} = (6, -1, -1).$$

Usamos el punto P_1 en la ecuación punto-normal:

$$6(x - 0) - (y + 1) - (z - 0) = 0 \implies 6x - y - z - 1 = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $6x - y - z - 1 = 0$.

Opción A - Ejercicio 3. Mezcla de aleaciones

Sean x, y, z los gramos de las aleaciones A, B, C . La suma debe ser 25 gramos. El lingote tendrá $0,72 \cdot 25 = 18$ gramos de oro y $0,16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata. Usando las proporciones de la tabla, el sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 25, \\ x + 0,75y + 0,60z = 18, \\ 0,15y + 0,22z = 4. \end{cases}$$

De la primera ecuación, $x = 25 - y - z$. La sustituimos en la ecuación del oro:

$$25 - y - z + 0,75y + 0,60z = 18 \implies 5y + 8z = 140,$$

donde se han multiplicado ambos miembros por 20 para eliminar decimales. La ecuación de la plata, multiplicada por 100, es $15y + 22z = 400$. Así,

$$\begin{cases} 5y + 8z = 140, \\ 15y + 22z = 400. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 3 y restamos la segunda: $2z = 20$, por lo que $z = 10$. Entonces $5y + 80 = 140$, de donde $y = 12$, y finalmente $x = 25 - 12 - 10 = 3$. Las cantidades son no negativas y suman los 25 gramos exigidos. **Conclusión.** Se necesitan 3 g de A , 12 g de B y 10 g de C .

Opción A - Ejercicio 4. Independencia y probabilidad condicionada

Los datos son $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Para comprobar la independencia primero calculamos la intersección usando la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18}.$$

La independencia exigiría $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9} = \frac{4}{18}$. Como $\frac{5}{18} \neq \frac{4}{18}$, los sucesos no son independientes. **Conclusión.** A y B son sucesos dependientes.

b) Probabilidad de $\bar{A}$ sabiendo que ocurre B

Usamos la definición de probabilidad condicionada y que $\bar{A} \cap B$ es la parte de B que queda al quitar $A \cap B$:

$$P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{4}{9}$.

Opción B - Ejercicio 1. Operaciones y potencias de matrices

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Cálculo de $B = (A - I)(2I + 2A)$

Como I conmuta con A , podemos escribir $B = 2(A - I)(A + I) = 2(A^2 - I)$. Calculamos primero la potencia:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$B = 2(A^2 - I) = 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz B es $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Rangos de $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$

La matriz es diagonal por bloques: su primera coordenada se multiplica por 2 y el bloque inferior intercambia las dos coordenadas. Por ello,

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La segunda y la tercera fila son opuestas, mientras que la primera es independiente de ellas; así, $\text{rg}(A - I) = 2$. Ya hemos calculado A^2 , luego

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene una única fila no nula y rango 1. Como el bloque de intercambio cumple $S^2 = I_2$, se tiene $S^3 = S$; por tanto,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 - I = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo las dos últimas filas son opuestas y la primera es independiente, por lo que el rango es 2. **Conclusión.** $\text{rg}(A - I) = 2$, $\text{rg}(A^2 - I) = 1$ y $\text{rg}(A^3 - I) = 2$.

c) Inversa de A^6

A partir de $A^2 = \text{diag}(4, 1, 1)$,

$$A^6 = (A^2)^3 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es diagonal y todos sus elementos diagonales son no nulos, así que es invertible. Su inversa se obtiene tomando los inversos de dichos elementos:

$$(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La inversa de A^6 existe y es la matriz anterior.

Opción B - Ejercicio 2. Tangente, asíntotas y monotonía

La función es $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$. El denominador es positivo para todo real, así que el dominio es $\mathbb{R}$.

a) Recta tangente en $x = 0$

La ecuación de la tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x}}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{e^{-x}(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = -1$, por lo que

$$y - 1 = -1(x - 0) \implies y = 1 - x.$$

Conclusión. La recta tangente es $y = 1 - x$.

b) Asíntotas verticales y horizontales

No hay asíntotas verticales: f está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 > 0$. Para las horizontales, estudiamos los dos extremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = +\infty.$$

En el primer límite la exponencial decrece más deprisa que el denominador crece; en el segundo, escribiendo $u = -x \rightarrow +\infty$, queda $e^u/(u^2 + 1) \rightarrow +\infty$. Solo existe asíntota horizontal en $+\infty$. **Conclusión.** No hay asíntotas verticales; la única horizontal es $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

c) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

El signo de la derivada determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Como $e^{-x} > 0$ y $(x^2 + 1)^2 > 0$,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} \leq 0,$$

y solo se anula en $x = -1$. En los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$ la derivada es negativa; por tanto, la función decrece en ambos y, en conjunto, es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$. El signo no cambia al atravesar $x = -1$, de modo que allí no hay extremo. **Conclusión.** f decrece en todo $\mathbb{R}$ y no tiene máximos ni mínimos relativos.

Opción B - Ejercicio 3. Distancia y plano perpendicular

Sean $P_1 = (3, 2, 0)$ y $P_2 = (7, 0, 2)$. El vector director de la recta se obtiene restando sus coordenadas:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (7 - 3, 0 - 2, 2 - 0) = (4, -2, 2) = 2(2, -1, 1).$$

Usaremos $\vec{d} = (2, -1, 1)$ como vector director.

a) Distancia de $Q = (3, 5, -3)$ a r

La distancia de un punto a una recta se calcula como el área del paralelogramo formado por un vector director y el vector desde un punto de la recta hasta el punto dado, dividida entre la longitud del vector director:

$$d(Q, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Aquí, $\overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (0, 3, -3)$, así que

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{d} = (0, -6, -6), \quad \|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{d}\| = 6\sqrt{2}, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{6}.$$

Por tanto,

$$d(Q, r) = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}.$$

Conclusión. La distancia de Q a r es $2\sqrt{3}$.

b) Corte con el plano perpendicular a r por Q

Un plano perpendicular a r tiene como vector normal un vector director de la recta, aquí $(2, -1, 1)$. Al pasar por Q , su ecuación es

$$2(x - 3) - (y - 5) + (z + 3) = 0 \implies 2x - y + z + 2 = 0.$$

La recta en forma paramétrica, usando P_1 y $\vec{d}$, es

$$r: \quad x = 3 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sustituimos estas coordenadas en el plano:

$$2(3 + 2t) - (2 - t) + t + 2 = 0 \implies 6 + 6t = 0 \implies t = -1.$$

El punto correspondiente es $(3 - 2, 2 + 1, -1) = (1, 3, -1)$. **Conclusión.** El punto de corte es $(1, 3, -1)$.

Opción B - Ejercicio 4. Clasificación y ángulos de un triángulo

Sean $A = (1, 3, -1)$, $B = (3, 1, 0)$ y $C = (2, 5, 1)$. Calculamos los vectores de sus lados mediante restas de coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 2, 2), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 4, 1).$$

Sus longitudes son

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \quad |AC| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad |BC| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}.$$

Como $|AB| = |AC| \neq |BC|$, el triángulo es isósceles. Además, el producto escalar de los lados que concurren en A es

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0,$$

por lo que el ángulo en A es recto. Los otros dos ángulos son iguales por ser isósceles y suman 90° ; cada uno mide 45° . **Conclusión.** El triángulo es isósceles rectángulo: $\hat{A} = 90^\circ$ y $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$.