

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Junio de 2016 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Para calcular A^{-1} comprobamos primero que el determinante no es nulo:

$$\det A = 1(9 - 1) - 2(3 - 0) + (1 - 0) = 3.$$

La matriz de cofactores es

$$C_A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que, usando $A^{-1} = C_A^t / \det A$,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Como A es invertible, multiplicamos $AX = A + B$ por A^{-1} a la izquierda:

$$X = A^{-1}(A + B) = I + A^{-1}B.$$

Calculamos el producto y sumamos la identidad:

$$A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 21 \\ 3 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -9 & 21 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -9 & 21 \\ 3 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Rentabilidad de una inversión

La inversión x y la rentabilidad $R(x)$ se miden en miles de euros, y $x > 0$. Al ser $R(x) = -0,01x^2 + 0,1x + 1$ un polinomio, está definida para todo real; el dominio del modelo es $]0, +\infty[$.

a) Para maximizar la rentabilidad buscamos los puntos críticos y estudiamos el signo de la derivada:

$$R'(x) = -0,02x + 0,1 = 0 \implies x = 5.$$

Si $0 < x < 5$, $R'(x) > 0$; si $x > 5$, $R'(x) < 0$. Por ello R crece hasta $x = 5$ y decrece después, así que ahí alcanza el máximo absoluto:

$$R(5) = -0,01(25) + 0,1(5) + 1 = 1,25 \text{ miles de euros.}$$

Conviene invertir 5 miles de euros, es decir, 5000 euros, y la rentabilidad máxima es 1250 euros.

b) La rentabilidad media es el cociente entre la rentabilidad total y la cantidad invertida:

$$R_{\text{med}}(x) = \frac{R(x)}{x} = -0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Su derivada es

$$R'_{\text{med}}(x) = -0,01 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad (x > 0),$$

por lo que la rentabilidad media decrece estrictamente al aumentar la inversión.

Máximo de R : 1250 € con una inversión de 5000 €; $R_{\text{med}}(x) = -0,01x + 0,1 + \frac{1}{x}$ es decreciente.

Problema 3 · Elección de videoclub

Sean A, B, C los sucesos de que Juan elija cada videoclub y E el suceso «la película es española». Como $P(C) = 0,2$ y $P(A) = P(B)$,

$$P(A) = P(B) = \frac{1 - 0,2}{2} = 0,4.$$

a) La probabilidad de que haya ido al videoclub A es, por tanto, $0,4$.

b) Las tres elecciones son incompatibles y cubren todos los casos. Sumamos las probabilidades conjuntas de elegir cada local y encontrar una película española:

$$P(E) = 0,4(0,35) + 0,4(0,55) + 0,2(0,40) = 0,44.$$

c) En C , la probabilidad de película no española es $1 - 0,40 = 0,60$. Usando la probabilidad condicionada,

$$P(C | \bar{E}) = \frac{P(C \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{1 - 0,44} = \frac{0,12}{0,56} = \frac{3}{14}.$$

$$P(A) = 0,4; \quad P(E) = 0,44; \quad P(C | \bar{E}) = \frac{3}{14}.$$

Opción B

Problema 1 · Precios de compra de frutas

Sean p, a, r los precios por kilogramo, en euros, de melocotones, manzanas y peras. El coste de compra fue $1087 - 257 = 830$ euros. El beneficio procede del margen sobre el precio de compra, de modo que

$$200p + 100a + 300r = 830, \quad 50p + 25a + 120r = 257, \quad p = r + 0,5.$$

Sustituyendo $p = r + 0,5$ en las dos primeras ecuaciones y simplificando:

$$5r + a = 7,3, \quad 34r + 5a = 46,4.$$

De la primera, $a = 7,3 - 5r$. Al sustituir en la segunda,

$$34r + 5(7,3 - 5r) = 46,4 \implies 9r = 9,9 \implies r = 1,10.$$

Así, $a = 1,80$ y $p = 1,60$ euros por kilogramo.

$$\text{Melocotones: } 1,60 \text{ €/kg; manzanas: } 1,80 \text{ €/kg; peras: } 1,10 \text{ €/kg.}$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$. El denominador se anula en $x = 4$, así que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

El numerador solo se anula en $x = 0$, que pertenece al dominio; el único corte con ambos ejes es $(0, 0)$.

Asíntotas. Al acercarnos a 4 , el numerador tiende a 16 y el denominador cambia de signo:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty,$$

por lo que $x = 4$ es una asíntota vertical. Para estudiar el infinito dividimos:

$$f(x) = -x - 4 + \frac{16}{4-x}.$$

El último término tiende a cero tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, de modo que la asíntota oblicua es $y = -x - 4$. Equivalentemente, $m = \lim f(x)/x = -1$ y $n = \lim(f(x) - mx) = -4$. Como $f(x)$ no tiende a un valor finito en ninguno de los dos infinitos, no hay asíntota horizontal.

Crecimiento y extremos. Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{x(8-x)}{(4-x)^2} = 0 \implies x = 0, 8.$$

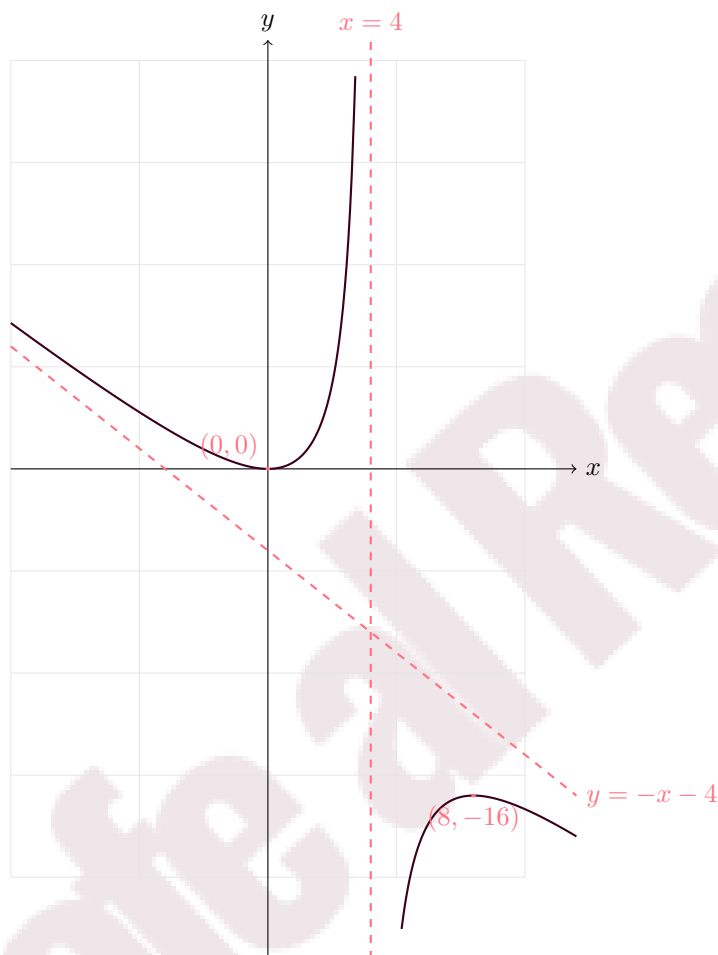
El denominador es positivo en el dominio. Para determinar el signo del numerador usamos un valor de prueba en cada intervalo:

intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, 8)$	$(8, +\infty)$
prueba x	-1	1	5	9
$f'(x)$	-	+	+	-

Así, f decrece en $(-\infty, 0)$ y $(8, +\infty)$, y crece en $(0, 4)$ y $(4, 8)$. Cambia de decreciente a creciente en $x = 0$, y de creciente a decreciente en $x = 8$:

$$f(0) = 0, \quad f(8) = -16.$$

Tiene un mínimo local $(0, 0)$ y un máximo local $(8, -16)$.



Corte $(0, 0)$; $x = 4$ vertical; $y = -x - 4$ oblicua; mínimo local $(0, 0)$, máximo local $(8, -16)$.

Problema 3 · Sucesos en un experimento

El espacio muestral es $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sean $A = \{a, c, d\}$ y $B = \{c, e, f\}$. De los datos,

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{4}, \quad A \cap B = \{c\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}.$$

a) Aplicamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

b) Como $\bar{A} = \{b, e, f\}$, tenemos $\bar{A} \cup B = \{b, c, e, f\}$:

$$P(\bar{A} \cup B) = P(b) + P(c) + P(e) + P(f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

c) Los elementos de $\bar{A}$ que también pertenecen a B son e y f :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(e) + P(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

d) Al condicionar a que haya ocurrido B , dividimos por $P(B)$:

$$P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{2/3}{3/4} = \frac{8}{9}.$$

$P(A \cup B) = \frac{11}{12}; \quad P(\bar{A} \cup B) = \frac{5}{6}; \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3}; \quad P(\bar{A} B) = \frac{8}{9}.$
--