

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2024–2025 · Examen titular A

Se resuelven todos los ejercicios de los cuatro bloques, incluidas las alternativas, a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Cálculo de retribuciones y matrices

a) Retribución de los vendedores. Organizamos en una matriz las horas, demostraciones y viajes de cada vendedor. El vector de costes por unidad de actividad es $c = (75, 300, 250)^T$, en euros. El vendedor B trabajó el doble de las 40 horas de A, es decir, 80 horas:

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}, \quad Mc = \begin{pmatrix} 7250 \\ 12500 \\ 17500 \end{pmatrix}.$$

El producto matricial suma, para cada vendedor, el pago por horas, demostraciones y viajes. A esas cantidades brutas les aplicamos la retención indicada: el 15% si son inferiores a 10 000 € y el 18% en caso contrario.

Vendedor	Retención	Cantidad neta
A	15%	$7250(1 - 0,15) = 6162,50 \text{ €}$
B	18%	$12500(1 - 0,18) = 10250 \text{ €}$
C	18%	$17500(1 - 0,18) = 14350 \text{ €}$

$$A : 6162,50 \text{ €}; \quad B : 10250 \text{ €}; \quad C : 14350 \text{ €}.$$

b) Invertibilidad. Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos el determinante de la matriz del enunciado por la primera fila:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = -2 \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & a-1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ = -6(a-1) - 2(9-8) - 4(a-1) = 8 - 10a.$$

Por tanto, A es invertible cuando $8 - 10a \neq 0$, es decir, cuando $a \neq \frac{4}{5}$.

$$A \text{ es invertible para } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{4}{5} \right\}.$$

Bloque B

Ejercicio 2 · Difusión de una noticia

La función está definida para $t > 0$, que es el tiempo transcurrido desde el lanzamiento. Estudiamos su derivada para conocer el crecimiento y la segunda derivada para determinar la curvatura:

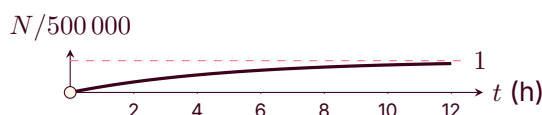
$$N(t) = 500\,000(1 - e^{-0,2t}), \quad N'(t) = 100\,000e^{-0,2t} > 0, \quad N''(t) = -20\,000e^{-0,2t} < 0.$$

Así, el número de visitas aumenta a todo momento, aunque cada vez más despacio: la gráfica es cóncava hacia abajo. Además,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} N(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 500\,000.$$

La recta $N = 500\,000$ es una asíntota horizontal; el número de visitas se aproxima a esa cifra sin alcanzarla. El recorrido es $(0, 500\,000)$.

b) Representación. Dibujamos la función creciente y cóncava, junto con su asíntota. El eje vertical se expresa en centenas de miles de visitas.



c) **Tiempo para alcanzar 450 000 visitas.** Despejamos t de la ecuación $N(t) = 450\,000$:

$$500\,000(1 - e^{-0,2t}) = 450\,000 \implies e^{-0,2t} = 0,1 \implies -0,2t = \ln(0,1) \implies t = 5 \ln(10) \approx 11,51 \text{ h.}$$

d) **Velocidad de difusión.** La derivada mide cuántas personas por hora se incorporan en cada instante. Comparamos los dos valores:

$$N'(1) = 100\,000e^{-0,2} \approx 81\,873, \quad N'(10) = 100\,000e^{-2} \approx 13\,534.$$

La difusión es más rápida durante la primera hora; a las diez horas el ritmo es menor.

$$t = 5 \ln(10) \text{ h} \approx 11,51 \text{ h}; \quad N'(1) > N'(10).$$

Ejercicio 3 · Función a trozos: glucosa

Para estudiar el nivel de glucosa derivamos cada expresión en su intervalo. La función es

$$f(t) = \begin{cases} \frac{5}{6} \left(\frac{t^3}{3} - 12t^2 + 108t + 108 \right), & 0 \leq t \leq 12, \\ t^2 - 40t + 546, & 12 < t \leq 24. \end{cases}$$

En el primer tramo,

$$f'(t) = \frac{5}{6}(t^2 - 24t + 108) = \frac{5}{6}(t - 6)(t - 18).$$

Como $0 \leq t \leq 12$, la derivada es positiva si $0 \leq t < 6$ y negativa si $6 < t \leq 12$. En el segundo tramo,

$$f'(t) = 2t - 40,$$

que es negativa para $12 < t < 20$ y positiva para $20 < t \leq 24$. En el punto de unión, ambas expresiones valen 210, así que la función no presenta salto. Por tanto, crece de 0 a 6 h, decrece de 6 a 20 h y vuelve a crecer de 20 a 24 h.

b) **Máximo y mínimo absolutos.** Basta comparar los extremos del dominio y los puntos críticos. Los valores son

$$f(0) = 90, \quad f(6) = 330, \quad f(12) = 210, \quad f(20) = 146, \quad f(24) = 162.$$

El mayor valor es 330 y el menor es 90.

$$\text{Máximo: } 330 \text{ mg/dl a las 6 h;} \quad \text{mínimo: } 90 \text{ mg/dl a las 0 h.}$$

c) **Nivel de 155 mg/dl después del mediodía.** Para $t > 12$ se utiliza el segundo tramo. Resolvemos la ecuación y comprobamos que sus soluciones pertenecen al intervalo:

$$t^2 - 40t + 546 = 155 \implies t^2 - 40t + 391 = 0 \implies (t - 17)(t - 23) = 0.$$

Ambos instantes son posteriores a las 12 h.

$$t = 17 \text{ h y } t = 23 \text{ h, es decir, a las 17:00 y a las 23:00.}$$

Bloque C

Ejercicio 4 · Probabilidad condicionada

Elegimos cada llavero con probabilidad $1/3$. Llamamos A_i al suceso «se elige el llavero i » y C al suceso «la llave abre el trastero». Las probabilidades de acierto son $P(C | A_1) = 1/7$, $P(C | A_2) = 1/8$ y $P(C | A_3) = 1/5$. Para una rama del árbol se multiplican sus probabilidades; los casos incompatibles se suman.

$$P(C) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(C | A_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \right) = \frac{131}{840}.$$

a) Fallar es el suceso complementario de acertar:

$$P(C^c) = 1 - P(C) = \frac{709}{840}.$$

b) Para que la llave abra y proceda del tercer llavero, deben ocurrir ambas cosas:

$$P(A_3 \cap C) = P(A_3)P(C | A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

c) Aplicamos la definición de probabilidad condicionada; en el numerador sumamos los casos de acierto de los llaveros primero y tercero:

$$P(A_1 \cup A_3 | C) = \frac{P(A_1 \cap C) + P(A_3 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{7} + \frac{1}{5})}{\frac{131}{840}} = \frac{96}{131}.$$

d) Entre los fallos, sumamos las ramas segunda y tercera:

$$P(A_1^c | C^c) = \frac{\frac{1}{3}(\frac{7}{8} + \frac{4}{5})}{\frac{709}{840}} = \frac{469}{709}.$$

$P(C^c) = \frac{709}{840}; \quad P(A_3 \cap C) = \frac{1}{15}; \quad P(A_1 \cup A_3 C) = \frac{96}{131}; \quad P(A_1^c C^c) = \frac{469}{709}.$

Ejercicio 5 · Distribución binomial

Cada persona contrata el servicio con probabilidad $p = 0,2$, de forma independiente. Si X cuenta las contrataciones entre 20 personas, entonces $X \sim \text{Bin}(20, 0,2)$, con $q = 0,8$. La probabilidad de obtener exactamente k contrataciones es $P(X = k) = \binom{20}{k} p^k q^{20-k}$.

a) $P(X = 10) = \binom{20}{10} (0,2)^{10} (0,8)^{10} \approx 0,00203.$

Para «al menos 2» usamos el complementario de 0 o 1 contratación, lo que reduce el cálculo:

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (0,8)^{20} - 20(0,2)(0,8)^{19} \approx 0,93082.$

La esperanza de una binomial es $E(X) = np$, así que $E(X) = 20 \cdot 0,2 = 4$. Si se eligen n personas, la esperanza es $0,2n$; para que alcance al menos 13:

$$0,2n \geq 13 \implies n \geq 65.$$

$P(X = 10) \approx 0,00203; \quad P(X \geq 2) \approx 0,93082; \quad E(X) = 4; \quad n_{\min} = 65.$
--

Bloque D

Ejercicio 6 · Intervalo de confianza para una media

El intervalo dado es simétrico alrededor de la media muestral. Por ello, su centro es el punto medio de los extremos:

$$\bar{x} = \frac{10,794 + 13,206}{2} = 12 \text{ h.}$$

Si la población es normal y se conoce $\sigma = 5$, el error máximo del intervalo para la media es

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{amplitud} = 2E.$$

Esta fórmula muestra que, al crecer n y mantenerse el nivel de confianza, la amplitud disminuye por el factor $1/\sqrt{n}$. Asimismo, para reducir la amplitud manteniendo n , hay que reducir el valor crítico $z_{\alpha/2}$, es decir, bajar el nivel de confianza.

d) **Tamaño máximo para que el intervalo contenga $\mu = 10,2$.** El centro sería $\bar{x} = 12$, por lo que el error debe ser al menos la distancia $|12 - 10,2| = 1,8$. Con confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,1701$:

$$2,1701 \frac{5}{\sqrt{n}} \geq 1,8 \implies n \leq \left(\frac{2,1701 \cdot 5}{1,8} \right)^2 \approx 36,34.$$

El mayor tamaño entero que cumple la condición es 36.

$\bar{x} = 12 \text{ h}; \quad \text{la amplitud disminuye al crecer } n; \quad n_{\max} = 36.$

Ejercicio 7 · Distribución normal e intervalo de confianza

a) Desajuste máximo de un minuto. Sea $X \sim N(0, 2,2)$, con media 0 y desviación típica 2,2. Estandarizamos $Z = X/2,2 \sim N(0, 1)$:

$$P(|X| \leq 1) = P\left(-\frac{1}{2,2} \leq Z \leq \frac{1}{2,2}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2,2}\right) - 1 \approx 0,3506.$$

Por tanto, el porcentaje es aproximadamente el 35,06%.

b1) Intervalo para la media poblacional. La media de la muestra de 15 trenes es

$$\bar{x} = \frac{0 + 1,3 - 2,1 - 1,5 + 2 + 0,8 + 5 + 2,1 - 3 + 1,8 + 3,1 + 4 - 0,7 + 1,6 - 5,4}{15} = 0,6 \text{ min.}$$

Como se conoce $\sigma = 2,2$, para confianza del 96% usamos $z_{0,98} \approx 2,0537$. El error es

$$E = 2,0537 \frac{2,2}{\sqrt{15}} \approx 1,1666 \text{ min,}$$

y el intervalo resulta

$$\bar{x} \pm E = 0,6 \pm 1,1666 \implies IC_{96\%}(\mu) \approx (-0,5666, 1,7666).$$

El valor de 2 minutos no pertenece al intervalo. Por tanto, con este nivel de confianza no se puede sostener que el retraso medio poblacional sea 2 minutos. El intervalo se refiere a la media, no al retraso de cada tren individual.

b2) Tamaño mínimo. Para que el error no supere 1,1 minutos, imponemos $z_{0,99}\sigma/\sqrt{n} \leq 1,1$, donde $z_{0,99} \approx 2,3263$:

$$n \geq \left(\frac{2,3263 \cdot 2,2}{1,1}\right)^2 \approx 21,65.$$

Redondeamos hacia arriba porque n debe ser entero.

$P(X \leq 1) \approx 35,06\%; \quad IC_{96\%}(\mu) \approx (-0,5666, 1,7666); \quad n_{\min} = 22.$
