

Convocatoria ordinaria de 2023

Resolución completa de los ocho ejercicios con desarrollo y resultados exactos.

Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R}$ y $f(x) > 0$. Como $e^x + e^{-x} \geq 2$, con igualdad solo cuando $x = 0$, se tiene $f(x) \leq 1/2$. Por tanto, el máximo absoluto es $f(0) = 1/2$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

pero la función es siempre positiva, así que no alcanza un mínimo absoluto. Para el límite pedido, cuando $x \rightarrow +\infty$ el término e^{-x} es despreciable frente a e^x , y $x^2 f(x) \sim x^2 e^{-x} \rightarrow 0$. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$.

Ejercicio 2

La pendiente de la secante entre los extremos es

$$m_s = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{9 - 1}{4} = 2.$$

La pendiente de la tangente es $f'(x) = 3x^2 - 2$. Igualarla a 2 da $3x^2 - 2 = 2$, luego $x = \pm 2/\sqrt{3}$. Ambas abscisas pertenecen al intervalo. El punto de inflexión cumple $f''(x) = 6x = 0$, es decir, $x = 0$ y $f(0) = 5$. La pendiente tangente vale $f'(0) = -2$, por lo que la tangente es $y = -2x + 5$. La normal tiene pendiente $1/2$. Así,

$$\text{tangente: } y = -2x + 5, \quad \text{normal: } y = \frac{x}{2} + 5.$$

Ejercicio 3

Como $|x - 1| = 1 - x$ si $x < 1$, alrededor de $x = 0$ la función es $f(x) = x - x^2$. Su valor y derivada en 0 son 0 y 1, de modo que la tangente es $y = x$. La gráfica corta esa tangente también en $x = 2$ (en el tramo $x \geq 1$, $x^2 - x = x$). El recinto está entre 0 y 2 y hay que separar en $x = 1$, donde cambia la expresión de f :

$$S = \int_0^1 (x - (x - x^2)) dx + \int_1^2 (x - (x^2 - x)) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Ejercicio 4

Por el teorema fundamental del cálculo, $F'(0) = \sin(0) = 0$, y cerca de 0 el integrando satisface $\sin(t^2) \sim t^2$. En ambos lados de cero, $|\sin(t^2)| \leq t^2$, por lo que $|F(x)| \leq |x|^3/3$. Además, $|\sin(x^2)| \sim x^2$. Por comparación,

$$\left| \frac{x F(x)}{\sin(x^2)} \right| \leq \frac{|x|^4/3}{|\sin(x^2)|} \rightarrow 0,$$

y el límite vale 0.

Ejercicio 5

Sean B, N, R las cantidades de coches blancos, negros y rojos, y $T = B + N + R$. El enunciado se expresa como

$$0.60B + 0.50N = 0.30T, \quad 0.20B + 0.60N + 0.60R = 0.50T, \quad N = B + 100.$$

La solución es $B = 500, N = 600, R = 900$. Se verifica que $T = 2000, 300 + 300 = 600 = 0.30T$ y $100 + 360 + 540 = 1000 = 0.50T$. Por tanto, se vendieron $\boxed{B = 500, N = 600, R = 900}$ coches.

Ejercicio 6

El determinante de A es m^3 , así que A tiene inversa si y solo si $\boxed{m \neq 0}$. La ecuación $AX + X = B$ se escribe $(A + I)X = B$. Para $m \neq -1$, la matriz $A + I$ es invertible; su determinante es $m^3 + 1$. Al multiplicar por su inversa,

$$X = (A + I)^{-1}B = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad m \neq -1.$$

Esta fórmula resuelve la ecuación para todos los valores indicados, incluido $m = 0$.

Ejercicio 7

El vector director del segmento PQ es $Q - P = (2, -2, -2)$, proporcional a $(1, -1, -1)$. El punto medio es $M = (1, 2, 7)$. El plano perpendicular al segmento tiene ese vector como normal y pasa por M :

$$(x - 1) - (y - 2) - (z - 7) = 0 \iff x - y - z + 8 = 0.$$

Corta los ejes en $A = (-8, 0, 0)$, $B = (0, 8, 0)$ y $C = (0, 0, 8)$. Usando dos lados del triángulo,

$$\overrightarrow{AB} = (8, 8, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (8, 0, 8), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (64, -64, -64).$$

El área es la mitad del módulo, $\boxed{32\sqrt{3}}$.

Ejercicio 8

La recta r pasa por B y tiene vector director $C - B = (-2, 0, -2)$. Con $A = (-1, 1, 3)$,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 0, -4).$$

El área del paralelogramo generado por estos dos vectores es $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 10$, así que la distancia de A a r es esa área dividida por $\|C - B\| = 2\sqrt{2}$:

$$\boxed{d(A, r) = \frac{5}{\sqrt{2}}}.$$

El área del triángulo ABC es la mitad del mismo producto vectorial, por lo que $\boxed{\mathcal{A} = 5}$.