



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 4x - 3$.
- b) **[1,75 puntos]** Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = 4x - 3$ y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una fábrica dispone de tres líquidos L_1 , L_2 y L_3 , en los que se encuentran disueltas dos sustancias: sodio y magnesio. Cada litro del líquido L_1 contiene 120 mg de sodio y 90 mg de magnesio, cada litro del líquido L_2 contiene 100 mg de sodio y 90 mg de magnesio y cada litro del líquido L_3 contiene 60 mg de sodio y 180 mg de magnesio. ¿Es posible obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una? En caso afirmativo, calcula dichas cantidades.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

- [1 punto]** Determina los valores de m para que la matriz A tenga inversa.
- [1,5 puntos]** Calcula para $m=1$, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(2, 0, -1)$.

- [1,5 puntos]** Halla los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.
- [1 punto]** Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de dicho segmento.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{2}$. Halla la ecuación del plano π' , paralelo a π , tal que si Q y Q' son respectivamente los puntos de corte de la recta r con los planos π y π' , entonces la distancia entre Q y Q' sea de 2 unidades.

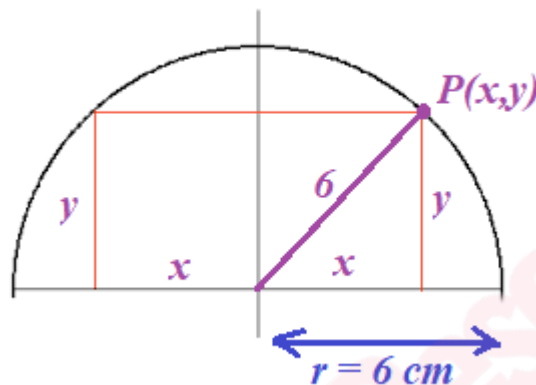
SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.

La situación planteada es la del dibujo. La semicircunferencia tiene radio 6 cm.



El área del rectángulo es $A(x, y) = 2x \cdot y$, $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$.

Si miramos el dibujo tenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa 6 y de catetos x e y . Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que se cumple $x^2 + y^2 = 6^2$.

Sustituimos en la expresión de la función área.

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = 2x \cdot y \\ y = \sqrt{36 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 6$$

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$A(x) = 2x\sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{36x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = 2 \frac{72x - 4x^3}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} = \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{72x - 4x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 72x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 18x - x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(18 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 18 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \end{cases}$$

Averiguamos el valor de x que nos proporciona un área máxima viendo la evolución de la derivada de la función en el intervalo $[0, 6]$.

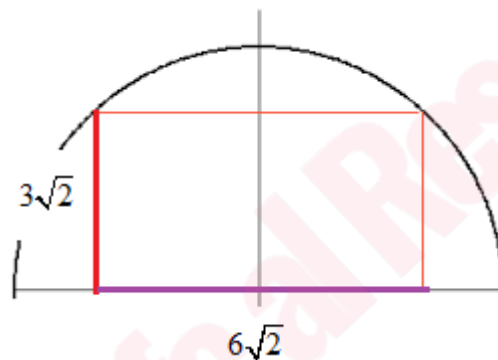
En el intervalo $[0, 3\sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $A'(1) = \frac{72-4}{\sqrt{36-1}} = \frac{68}{\sqrt{35}} > 0$. La derivada es positiva y la función crece en el intervalo $[0, 3\sqrt{2})$.

En el intervalo $(3\sqrt{2}, 6]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $A'(5) = \frac{72 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{\sqrt{36 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{-140}{\sqrt{275}} < 0$. La derivada es negativa y la función decrece en el intervalo $(3\sqrt{2}, 6]$.

La función área tiene un valor máximo en $x = 3\sqrt{2}$.

Para $x = 3\sqrt{2}$ tenemos que $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

El rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio tiene unas dimensiones de base $2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ y de altura $3\sqrt{2}$.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = \frac{\operatorname{sen}(0) - \ln(1+0)}{a \cdot 0^2 - 0 + e^0 - \cos(2 \cdot 0)} = \frac{0-0}{0-0+1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+x}}{2ax - 1 + e^x + 2\operatorname{sen}(2x)} =$$

$$= \frac{\cos(0) - \frac{1}{1+0}}{2a \cdot 0 - 1 + e^0 + 2\operatorname{sen}(2 \cdot 0)} = \frac{1-1}{0-1+1+0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{(1+x)^2}}{2a + e^x + 4\cos(2x)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(0) + \frac{1}{(1+0)^2}}{2a + e^0 + 4\cos(2 \cdot 0)} = \frac{0+1}{2a+1+4} = \boxed{\frac{1}{5+2a}}$$

Igualamos el valor del límite a $-\frac{1}{7}$.

$$\frac{1}{5+2a} = -\frac{1}{7} \Rightarrow 7 = -5 - 2a \Rightarrow 12 = -2a \Rightarrow a = \frac{12}{-2} = -6$$

El valor buscado es $a = -6$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{1}{9-x^2} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$$

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A(3+x)}{(3-x)(3+x)} + \frac{B(3-x)}{(3-x)(3+x)} = \frac{A(3+x)+B(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

$$1 = A(3+x) + B(3-x) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow 1=6A \rightarrow A=\frac{1}{6} \\ x=-3 \rightarrow 1=6B \rightarrow B=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x}$$

$$\dots = \int \frac{1/6}{3-x} + \frac{1/6}{3+x} dx = \int \frac{1/6}{3-x} dx + \int \frac{1/6}{3+x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{3-x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{3+x} dx =$$

$$= \frac{-1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|3+x| = \boxed{\frac{1}{6}(-\ln|3-x| + \ln|3+x|) + C}$$

Aplicamos este resultado en el cálculo de la integral definida pedida en el ejercicio.

$$\int_6^{12} \frac{1}{9-x^2} dx = \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-x| + \ln|3+x|) \right]_6^{12} =$$

$$= \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-12| + \ln|3+12|) \right] - \left[\frac{1}{6}(-\ln|3-6| + \ln|3+6|) \right] =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln 9 + \frac{1}{6} \ln 15 + \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{6} \ln 9 = \frac{1}{6}(\ln 15 + \ln 3 - 2 \ln 9) =$$

$$= \frac{1}{6}(\ln 3 \cdot 5 + \ln 3 - 2 \ln 3^2) = \frac{1}{6}(\ln 5 + \ln 3 + \ln 3 - 4 \ln 3) = \boxed{\frac{1}{6}(\ln 5 - 2 \ln 3)}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 4x - 3$.
 b) **[1,75 puntos]** Haz un esbozo del recinto limitado por la gráfica de f , la recta $y = 4x - 3$ y el eje de ordenadas. Calcula el área del recinto indicado.

- a) Para que la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ en $x = a$ sea $y = 4x - 3$ deben cumplirse dos cosas:

- Recta tangente y función coinciden en $x = a$.

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = a^2 + 1 \\ y = 4a - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + 1 = 4a - 3 \Rightarrow \boxed{a^2 - 4a + 4 = 0}$$

- La pendiente de la recta tangente (m) es el valor de la derivada en $x = a$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \rightarrow f'(a) = 2a \\ m = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Comprobamos que el valor obtenido cumple la primera condición.

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$$

Se cumple y el punto de la gráfica es $x = 2$. Para dicho valor $y = 4 \cdot 2 - 3 = 5$. El punto de la gráfica tiene coordenadas (2, 5).

- b) Averiguamos donde corta la función el eje de ordenadas ($x = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{P(0,1)}$$

Averiguamos donde corta la función $f(x) = x^2 + 1$ y la recta $y = 4x - 3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 1 \\ y = 4x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 1 = 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow y = 4 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow \boxed{Q(2,5)}$$

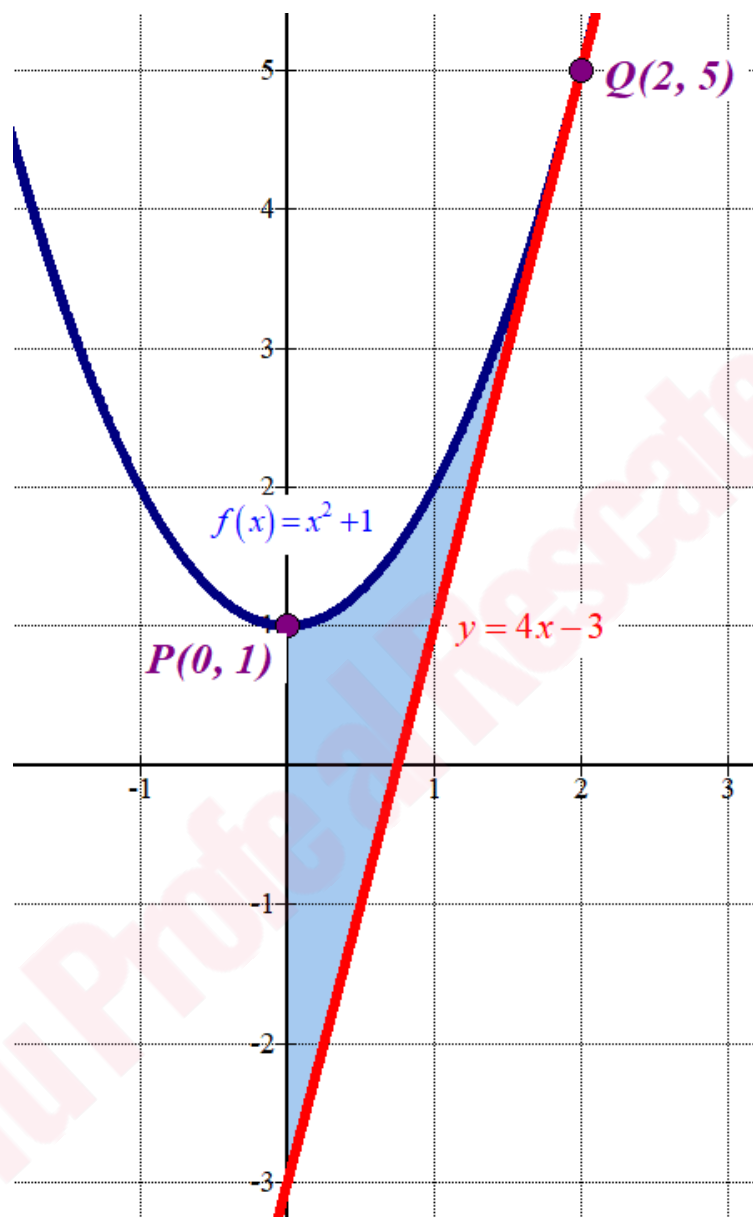
La gráfica de la función es una parábola. Averiguamos su vértice.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El vértice es el punto de corte con el eje de ordenadas (0, 1).

Hacemos una tabla de valores de la función $f(x) = x^2 + 1$ y de la recta $y = 4x - 3$ y las representamos.

x	$y = 4x - 3$	x	$f(x) = x^2 + 1$
0	-3	0	1
1	1	1	2
2	5	2	5



El área del recinto es el valor de la integral definida entre 0 y 2 de la parábola menos la recta.

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x^2 + 1 - (4x - 3) dx &= \int_0^2 x^2 + 1 - 4x + 3 dx = \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right] = \\
 &= \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = \boxed{\frac{8}{3} \approx 2.67 u^2}
 \end{aligned}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una fábrica dispone de tres líquidos L_1 , L_2 y L_3 , en los que se encuentran disueltas dos sustancias: sodio y magnesio. Cada litro del líquido L_1 contiene 120 mg de sodio y 90 mg de magnesio, cada litro del líquido L_2 contiene 100 mg de sodio y 90 mg de magnesio y cada litro del líquido L_3 contiene 60 mg de sodio y 180 mg de magnesio. ¿Es posible obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una? En caso afirmativo, calcula dichas cantidades.

Llamamos “ x ” al número de litros de L_1 , “ y ” al número de litros de L_2 y “ z ” al número de litros de L_3 que hay que utilizar en la mezcla.

Hacemos una tabla con los datos.

	Sodio (mg)	Magnesio (mg)
x (litros de L_1)	$120x$	$90x$
y (litros de L_2)	$100y$	$90y$
z (litros de L_3)	$60z$	$180z$
TOTAL	$120x + 100y + 60z$	$90x + 90y + 180z$

Por las condiciones dadas tenemos que:

“Obtener un litro de un líquido mezclando distintas cantidades de L_1 , L_2 y L_3 en el que la cantidad de sodio y de magnesio sea de 100 mg cada una” $\rightarrow$

$$x + y + z = 1; 90x + 90y + 180z = 100; 120x + 100y + 60z = 100.$$

Intentamos resolver el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 90x + 90y + 180z = 100 \\ 120x + 100y + 60z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 9x + 9y + 18z = 10 \\ 6x + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - y - z \\ \Rightarrow 9x + 9y + 18z = 10 \\ 6x + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9(1 - y - z) + 9y + 18z = 10 \\ 6(1 - y - z) + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 9 - 9y - 9z + 9y + 18z = 10 \\ 6 - 6y - 6z + 5y + 3z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9z = 1 \rightarrow \boxed{z = \frac{1}{9}} \\ -y - 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y - 3\frac{1}{9} = -1 \Rightarrow -y - \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow -y = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{x = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}}$$

Si es posible obtener la mezcla pedida con $\frac{2}{9}$ de litro de L_1 , $\frac{2}{3}$ de litro de L_2 y $\frac{1}{9}$ de litro de L_3 .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Determina los valores de m para que la matriz A tenga inversa.

b) [1,5 puntos] Calcula para $m=1$, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

a) Para que la matriz A tenga inversa debe de tener determinante no nulo. Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 12m^2 - 3 - (0 + 12m - 2) = 12m^2 - 12m - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12m^2 - 12m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(12)(-1)}}{24} =$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(12)(-1)}}{24} = \frac{12 \pm 8\sqrt{3}}{24} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de $m \neq \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

b) Para $m=1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 1 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial, sustituimos el valor de la matriz inversa de A obtenido y calculamos la expresión de X.

$$AX = B^t \Rightarrow X = A^{-1}B^t$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-5+12 & 0+10+4 & -4+25+16 \\ 0-1+3 & 0+2+1 & 0+5+4 \\ -3-7+18 & 0+14+6 & -6+35+24 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 37 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 53 \end{pmatrix}$$

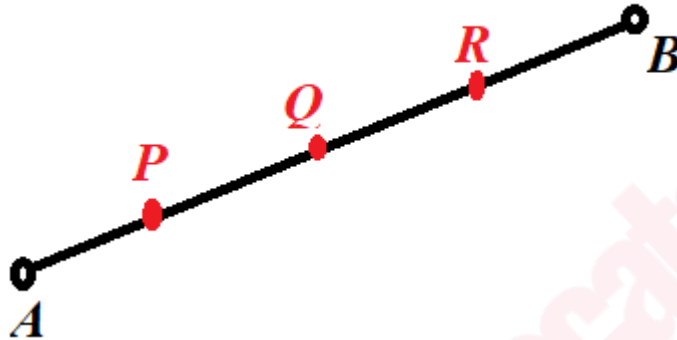
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(2, 0, -1)$.

a) [1,5 puntos] Halla los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.

b) [1 punto] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de dicho segmento.

a) Necesitamos encontrar tres puntos P , Q y R tales que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales.



Para determinar las coordenadas del punto P hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$. El vector $\overrightarrow{AP}$ será la cuarta parte del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) - (1, -2, 3) = (1, 2, -4)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{-4}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

El punto P se obtiene sumando a las coordenadas de A el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1, -2, 3) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right)$$

El punto Q se obtiene sumando a las coordenadas de P el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$Q = P + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{6}{4}, \frac{-2}{2}, 1\right) = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$$

El punto R se obtiene sumando a las coordenadas de Q el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$R = Q + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right)$$

Como comprobación deberíamos obtener el punto B al sumar a R el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$R + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{8}{4}, 0, -1\right) = (2, 0, -1) = B$$

Los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales son $P\left(\frac{5}{4}, \frac{-3}{2}, 2\right)$, $Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$ y $R\left(\frac{7}{4}, \frac{-1}{2}, 0\right)$.

b) El punto medio del segmento AB es el punto $Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$.

Como el plano que nos piden hallar es perpendicular al segmento AB el vector normal de dicho plano es el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -4)$.

Nos piden hallar la ecuación del plano que pasa por el punto Q y que tiene por vector normal el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -4)$.

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right) \in \pi \\ \pi \equiv x + 2y - 4z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + 2(-1) - 4(1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - 2 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 4z + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + 4y - 8z + 9 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv 2x + 4y - 8z + 9 = 0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Halla la ecuación del plano π' , paralelo a π , tal que si Q y Q' son respectivamente los puntos de corte de la recta r con los planos π y π' , entonces la distancia entre Q y Q' sea de 2 unidades.

Si el plano π' es paralelo al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv x + y + z + D = 0$.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \left. \begin{matrix} P_r(1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto Q de corte entre el plano π y la recta r .

$$\left. \begin{matrix} \pi \equiv x + y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 0, -1)}$$

Hallamos el punto Q' de corte entre el plano π' y la recta r .

$$\left. \begin{matrix} \pi' \equiv x + y + z + D = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda + D = 0 \Rightarrow 5\lambda + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{D}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{D}{5} \\ y = -\frac{2D}{5} \\ z = -1 - \frac{2D}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q'\left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right)}$$

Hallamos la distancia entre Q y Q'.

$$\left. \begin{matrix} Q'\left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right) \\ Q(1, 0, -1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \left(1 - \frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -1 - \frac{2D}{5}\right) - (1, 0, -1) = \left(-\frac{D}{5}, -\frac{2D}{5}, -\frac{2D}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(Q, Q') = |\overrightarrow{QQ'}| = \sqrt{\left(-\frac{D}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2D}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2D}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{D^2}{25} + \frac{4D^2}{25} + \frac{4D^2}{25}} = \sqrt{\frac{9D^2}{25}} = \boxed{\frac{3|D|}{5}}$$

Igualemos la distancia a 2 unidades para determinar el valor de D y por tanto la ecuación del plano π' .

$$\frac{3|D|}{5} = 2 \Rightarrow |D| = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{10}{3} \rightarrow \pi' \equiv x + y + z + \frac{10}{3} = 0 \rightarrow \boxed{\pi' \equiv 3x + 3y + 3z + 10 = 0} \\ D = -\frac{10}{3} \rightarrow \pi'' \equiv x + y + z - \frac{10}{3} = 0 \rightarrow \boxed{\pi'' \equiv 3x + 3y + 3z - 10 = 0} \end{cases}$$

Los planos que cumplen lo pedido en el ejercicio son $\pi' \equiv 3x + 3y + 3z + 10 = 0$ y también $\pi'' \equiv 3x + 3y + 3z - 10 = 0$