

Problema 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{cases}$$
, se pide:

- a) Justificar que para cualquier valor del parámetro real α , el sistema tiene solución única. (1 punto).
 b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α . (1.3 puntos).
 c) Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$. (1 punto).

Solución:

a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array} \right)$$

Estudiamos los rangos de la matriz de coeficientes, A , y de la ampliada A' .

A es una matriz 3×3 , luego su máximo rango será 3. Calculemos el menor de orden 3 de A ,

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 18 + 18 - 8 - 108 - 18 = -50 \neq 0 \quad \text{luego } \text{ran}(A) = 3.$$

Como A' es 3×4 , máximo rango de A' es 3. Como el rango de A ya es 3 el de A' también será 3. Por lo tanto: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Y como en todo el proceso de cálculo no ha intervenido el parámetro α podemos afirmar que el sistema tiene solución única (es SCD) para cualquier valor de α .

b) Resolvamos el sistema por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{40 + 18 + 18\alpha - 8\alpha - 18 - 90}{-50} = \frac{-50 + 10\alpha}{-50} = \frac{5 - \alpha}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{36 + 6\alpha + 30 - 6 - 36\alpha - 30}{-50} = \frac{30 - 30\alpha}{-50} = \frac{-3 + 3\alpha}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} = \frac{24\alpha + 45 + 9 - 20 - 54 - 9\alpha}{-50} = \frac{-20 + 15\alpha}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}$$

c) La solución del sistema que hemos obtenido en el apartado anterior debe satisfacer $x + y + z = 1$. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{5 - \alpha}{5} + \frac{-3 + 3\alpha}{5} + \frac{4 - 3\alpha}{10} &= 1 \\ \frac{10 - 2\alpha}{10} + \frac{-6 + 6\alpha}{10} + \frac{4 - 3\alpha}{10} &= 1 \\ 10 - 2\alpha - 6 + 6\alpha + 4 - 3\alpha &= 10 \\ 8 + \alpha &= 10 \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que, el valor buscado de α es 2.

Problema 1.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación

matricial $A X = \alpha X$. (1,5 puntos).

b) Resolver la ecuación matricial $A X = 2 X$. (1,8 puntos).

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = \alpha x \\ -x + y = \alpha y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (6 - \alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

para que la única solución del sistema sea la trivial, $x = y = 0$, deber ser $|A| \neq 0$, siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior.

Resolvamos

$$\begin{vmatrix} 6 - \alpha & 4 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (6 - \alpha)(1 - \alpha) + 4 = 0 \rightarrow 6 - 7\alpha + \alpha^2 + 4 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$$

$$\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego $\alpha^2 - 7\alpha + 10 \neq 0$ para $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$

Los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $A X = \alpha X$ son $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 5\}$

b) La ecuación $A X = 2 X$ corresponde al sistema planteado en el anterior apartado para $\alpha = 2$.

$$\begin{cases} (6 - 2)x + 4y = 0 \\ -x + (1 - 2)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Como se cumple que 1ª ecuación = -4 · 2ª ecuación el sistema es indeterminado, lo resolvemos, por ejemplo, a partir de la 2ª ecuación.

$$-x - y = 0; \quad y = -x$$

la solución será $X = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

Problema 2.1. Dado el plano $\pi: 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q = (2, 1, 3)$, se pide calcular :

- a) La distancia del punto Q al plano π . (1,1 puntos).
 b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. (1,1 puntos).
 c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q . (1,1 puntos).

Solución:

a)

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{|4 + 1 + 9 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{|13|}{\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{14}} \text{ u.l.}$$

b) Calculemos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas,

$$\begin{array}{l} \pi \cap OX \\ OX : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi : 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ 2x + 0 + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Debemos resolver el sistema:} \\ P_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \pi \cap OY \\ OY : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi : 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ 2 \cdot 0 + y + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Debemos resolver el sistema:} \\ P_2(0, 1, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \pi \cap OZ \\ OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \pi : 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ 2 \cdot 0 + 0 + 3z - 1 = 0 \\ 3z - 1 = 0 \\ 3z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Debemos resolver el sistema:} \\ P_3\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

Llamando A al área triángulo Δ cuyos vértices son P_1, P_2 y P_3

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{P}_1 \vec{P}_2 \times \vec{P}_1 \vec{P}_3 \right|$$

$$\vec{P}_1 \vec{P}_2 \left(\frac{-1}{2}, 1, 0 \right)$$

$$\vec{P}_1 \vec{P}_2 \left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{3} \right)$$

$$\vec{P}_1 \vec{P}_2 \times \vec{P}_1 \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \frac{1}{3} - \vec{j} \frac{1}{6} + \vec{k} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right)$$

$$y \quad \left| \vec{P}_1 \vec{P}_2 \times \vec{P}_1 \vec{P}_3 \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+1+9}{36}} = \sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

Finalmente,

$$A = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{12} \text{ u.a.}$$

c)

$$V(P_1, P_2, P_3, Q) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \quad (\text{desarrollando el determinante por la 3ª columna})$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \left| -1 \left(\frac{-1}{6} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{4+9}{6} \right| = \frac{13}{36} \text{ u.v.}$$

Problema 2.2. Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones

$\pi_1: x + 2y + z + 3 = 0$; $\pi_2: 2x + y - z - 6 = 0$, se pide:

- Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2 . (1,1 puntos).
- Calcular la ecuación paramétrica de la recta r , intersección de los planos π_1 y π_2 . (1,1 puntos).
- Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2 , es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos π_1 y π_2 , donde α es el ángulo obtenido en el apartado a). (1,1 puntos).

Solución:

a)

$$\alpha = \text{ang}(\pi_1, \pi_2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(1,2,1) \cdot (2,1,-1)|}{|(1,2,1)| |(2,1,-1)|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2} \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rds}$$

b)

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

resolvemos el sistema usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 - z \\ 2x + y = 6 + z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3-z & 2 \\ 6+z & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3-z-12-2z}{-3} = \frac{-15-3z}{-3} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3-z \\ 2 & 6+z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{6+z+6+2z}{-3} = \frac{12+3z}{-3} = -4-z$$

$$\text{Solución } r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c)

Sea β el ángulo que forman los planos π y π_1 .

$$\cos \beta = \frac{|(1,2,1) \cdot (1,1,0)|}{|(1,2,1)| |(1,1,0)|} = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2} \sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \text{ rds}$$

Sea δ el ángulo que forman los planos π y π_2 .

$$\cos \delta = \frac{|(2,1,-1) \cdot (1,1,0)|}{|(2,1,-1)| |(1,1,0)|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{6} \text{ rds}$$

$$\text{Luego } \beta = \delta = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{como queríamos comprobar.}$$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1,6 puntos).

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(0) = 0$. (1,7 puntos).

Solución:

a)

$$y = \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}$$

Asíntotas verticales:

$$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & & -1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 5 = 0 \rightarrow x^2 = -5 \quad \text{sin raíces reales.}$$

Veamos si $x = -1$ es a.v.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \frac{4(-1)^2 + 2(-1) + 10}{0} = \frac{4 - 2 + 10}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

análogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Por lo tanto $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Por lo tanto no hay asíntota oblicua.

b)

$$H(x) = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} dx$$

$$\frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} = \frac{A(x^2+5) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+5)}$$

$$4x^2 + 2x + 10 = A(x^2 + 5) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$x = -1 \rightarrow 4 - 2 + 10 = A(1 + 5) + (-B + C) = 0$$

$$12 = 6A \rightarrow A = 2$$

$$x = 0 \rightarrow 10 = 5A + C$$

$$10 = 5 \cdot 2 + C$$

$$10 = 10 + C \rightarrow C = 0$$

$$x = 1 \rightarrow 16 = 6A + (B + C)2$$

$$16 = 6 \cdot 2 + (B + 0)2$$

$$16 = 12 + 2B \rightarrow 4 = 2B \rightarrow B = 2$$

$$H(x) = \int \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x^2 + 5| + C =$$

como $x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$= \ln(x+1)^2 + \ln(x^2 + 5) + C$$

Debe ser $H(0) = 0$

$$0 = \ln(0+1)^2 + \ln(0^2 + 5) + C$$

$$0 = \ln 1 + \ln 5 + C$$

$$0 = 0 + \ln 5 + C$$

$$C = -\ln 5$$

Por lo que,

$$H(x) = \ln(x+1)^2 + \ln(x^2 + 5) - \ln 5 = \ln \frac{(x+1)^2 (x^2 + 5)}{5}$$

Problema 3.2. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \frac{4}{x}$.

- a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. (1.8 puntos).
 b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$. (1.5 puntos).

Solución:

a) Recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \text{punto } (2, 2)$$

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2} \rightarrow m = f'(2) = \frac{-4}{2^2} = -1$$

la ecuación de la recta tangente pedida será: $y - 2 = -1(x - 2)$

$$y - 2 = -x + 2$$

$$y = -x + 4$$

Recta normal a $f(x)$ en $x = 2$

punto $(2, 2)$

pendiente m' , siendo $m' = -1/m$; luego $m' = -1/(-1) = 1$

la ecuación de la recta normal pedida será: $y - 2 = 1(x - 2)$; $y = x$

b) Buscamos dos rectas tangentes a $f(x)$ que pasan por el punto $(4, -8)$, de ellas conocemos:

punto: $(4, -8)$

$$\text{pendiente: } m = f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

La ecuación de las rectas buscadas será:

$$y + 8 = \frac{-4}{x^2}(x - 4)$$

como las rectas pasan por puntos de la función $f(x)$, pasan por un punto de coordenadas

$$\left(x, \frac{4}{x}\right)$$

$$\text{luego } \frac{4}{x} + 8 = \frac{-4}{x^2}(x - 4)$$

$$\frac{4 + 8x}{x} = \frac{-4x + 16}{x^2}$$

$$4x^2 + 8x^3 = -4x^2 + 16x$$

$$8x^3 + 8x^2 - 16x = 0$$

$$8x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$8x(x^2 + x - 2) = 0 \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

la solución $x = 0$ no es válida ya que el dominio de $f(x)$ son los números reales no nulos.

Por lo que M y N son puntos de la función $f(x)$ con abscisas -2 y 1 , es decir,

$$x = -2 \rightarrow y = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x = 1 \rightarrow y = \frac{4}{1} = 4$$

Los puntos pedidos serán $M(-2, -2)$ y $N(1, 4)$.

Problema 4.1. Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B. (3,3 puntos).

Solución:

Llamando $NP_A(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa A para procesar n datos y $NP_B(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa B para procesar n datos

De los datos del problema sabemos que: $NP_A(n) \leq 12 + n\sqrt[4]{n^3}$ y $NP_B(n) = n^2 - 2n + 10$

Para comprobar que para n grandes el programa A realiza menos operaciones que el B calculemos el siguiente límite,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n\sqrt[4]{n^3}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{7/4}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{7/4}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{175}}{n^2 - 2n + 10} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{175}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{0.25}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Considerando que para valores grandes de n , $NP_A(n)$ y $NP_B(n)$ son positivos, podemos afirmar que:

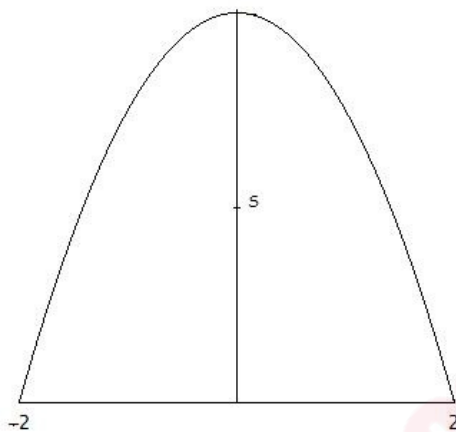
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} = 0$$

Como el valor del límite es 0, esto quiere decir que para valores de n grandes el denominador (número de operaciones del programa B) es mayor que el numerador, es decir, que el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B.

- Problema 4.2.** El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0, 2)$. Se pide:
- Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. (0,8 puntos).
 - Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. (1,6 puntos).
 - ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? (0,9 puntos).

Solución:

La representación gráfica del estanque es:



a)

El punto del segmento rectilíneo más cercano al surtidor, punto $S(0, 2)$, es el $(0, 0)$ ya que la distancia del surtidor a este punto es 2 y a cualquier otro punto del segmento rectilíneo sería:

$$d(S, (d, 0)) = \sqrt{(d - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{d^2 + 4}, d \in [-2, 2] \text{ y } d \neq 0$$

como $d^2 > 0$, entonces $4 + d^2 > 4$

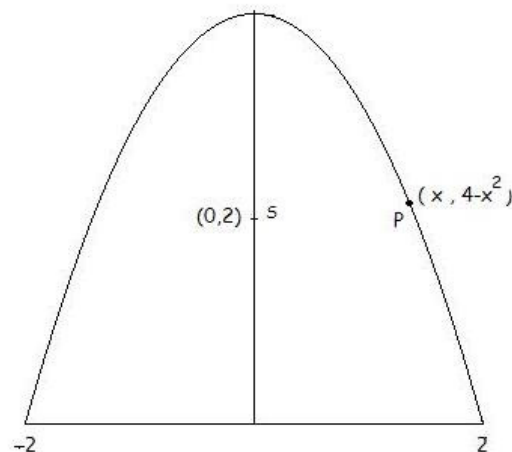
como tanto $4 + d^2$ como 4 son positivos se cumple que

$$\sqrt{4 + d^2} > \sqrt{4} \rightarrow \sqrt{4 + d^2} > 2$$

es decir, $d(S, (d, 0)) > d(S, (0, 0))$.

b)

Las coordenadas de cualquier punto del arco de curva son $(x, 4 - x^2)$



$$d(S, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$

$d(S, P)$ será mínima cuando $d = x^2 + (2 - x^2)^2$ sea mínima, calculemos el mínimo de esta última función.

$$d' = 2x + 2(2 - x^2)(-2x) = 2x - 8x + 4x^3 = 4x^3 - 6x$$

$$4x^3 - 6x = 0; \quad 2x(2x^2 - 3) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$$

Para ver para cuáles de los anteriores valores la función d es mínima calculemos su segunda derivada,

$$d'' = 12x^2 - 6$$

para $x = 0$, $d'' = 12 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0$, máximo

$$\text{para } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad d'' = 12 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 - 6 = 12 \frac{3}{2} - 6 = 18 - 6 = 12 > 0 \quad \text{mínimo}$$

$$\text{para } x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad d'' = 12 \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 - 6 = 12 \frac{3}{2} - 6 = 18 - 6 = 12 > 0 \quad \text{mínimo}$$

Tenemos las abscisas de los puntos buscados, calculemos sus ordenadas,

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad y = 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad y = 4 - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto los puntos del arco de curva del borde el estanque que están más próximos al surtidor son:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right)$$

c)

En los apartados anteriores hemos obtenido los puntos más cercanos al surtidor del borde rectilíneo y del curvo; estos puntos son

$$(0,0), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right)$$

El surtidor está en el punto (0,2), calculemos la distancia del surtidor a cada uno de los puntos anteriores.

Según obtuvimos en el apartado a), $d_1 = d(S, (0,0)) = 2$

Según obtuvimos en el apartado b), los puntos del arco de curva distan del surtidor

$$d(S, P) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$

$$d_2 = d\left(S, \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.3228757$$

$$d_3 = d\left(S, \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)\right) = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(2 - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.3228757$$

Por lo que los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor son: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2} \right)$