

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2021 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Mezcla de cafés

Sean x , y y z las fracciones de café colombiano, brasileño y keniano. Como el paquete pesa 1 kg y la cantidad de colombiano debe triplicar la de brasileño,

$$x + y + z = 1, \quad x = 3y.$$

El coste por kilogramo de mezcla es la media ponderada de los precios de cada café:

$$10x + 6y + 8z = 8,50.$$

Tomamos $x = 3y$ y $z = 1 - 4y$. Al sustituir en el coste,

$$30y + 6y + 8(1 - 4y) = 8,5 \implies 4y = 0,5 \implies y = 0,125.$$

Así, $x = 0,375$ y $z = 1 - 0,375 - 0,125 = 0,5$. Expresamos estas fracciones como porcentajes:

$$37,5\% \text{ colombiano, } 12,5\% \text{ brasileño, } 50\% \text{ keniano.}$$

Problema 2 · Operaciones con matrices

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Para calcular $(A - B)^{-1}$, primero restamos las matrices y comprobamos que el determinante no sea nulo:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - B) = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Por tanto, la inversa existe. Usamos $D^{-1} = \text{adj}(D) / \det D$ para $D = A - B$:

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Reordenamos la ecuación para dejar X multiplicada por una sola matriz:

$$XA + C = XB \implies X(A - B) = -C.$$

Como $(A - B)$ es invertible, multiplicamos por su inversa por la derecha. Así,

$$X = -C(A - B)^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

c) El producto BC no está definido: B tiene dimensión 3×3 y C dimensión 2×3 , por lo que las dimensiones interiores no coinciden. En cambio, CB sí se puede calcular, pues sus dimensiones son $(2 \times 3)(3 \times 3)$:

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad BC \text{ no existe, } CB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x^2 - 36}{(x - 4)(x + 2)}.$$

a) El denominador se anula en $x = -2$ y $x = 4$, así que esos valores se excluyen:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}.$$

Los cortes con el eje X se obtienen anulando el numerador: $x = \pm 6$. El corte con el eje Y corresponde a $x = 0$:

$$f(0) = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2}.$$

b) En los puntos excluidos, el numerador no se anula. Los límites laterales, teniendo en cuenta el signo de los factores del denominador, son

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, $x = -2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales. Como numerador y denominador tienen el mismo grado, el cociente de sus coeficientes principales da los límites en ambos infinitos: la asíntota horizontal es $y = 1$.

c) y d) Para estudiar la monotonía derivamos y buscamos los ceros de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x - 8) - (x^2 - 36)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-2x^2 + 56x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio. El numerador se anula en

$$\alpha = 14 - 4\sqrt{10}, \quad \beta = 14 + 4\sqrt{10}.$$

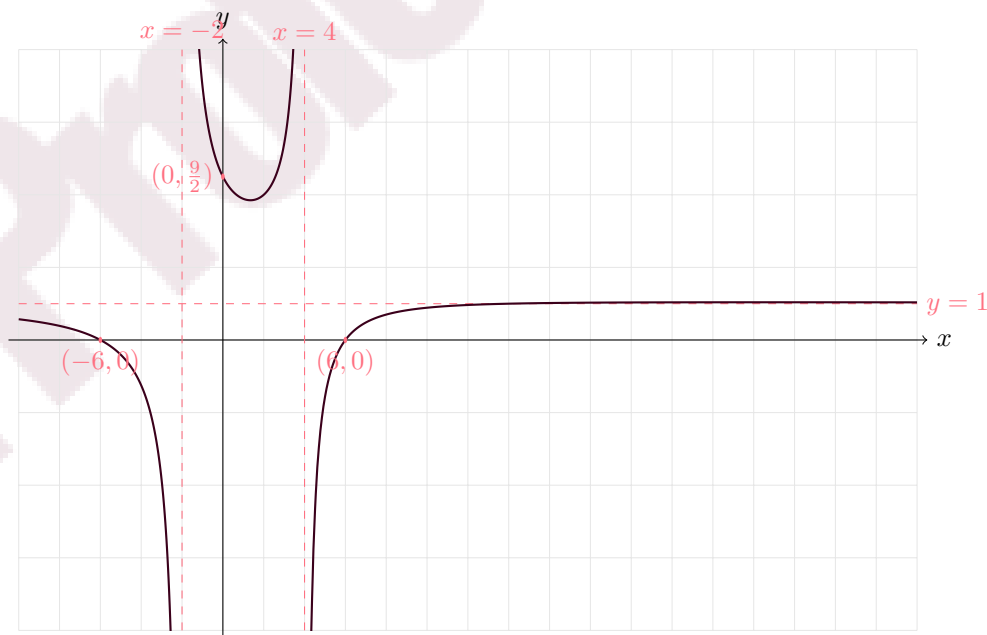
Separamos la recta en estos puntos y en las asíntotas. El signo de f' en cada intervalo es:

intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, \alpha)$	$(\alpha, 4)$	$(4, \beta)$	$(\beta, +\infty)$
signo de f'	-	-	+	+	-

Así, f decrece en $(-\infty, -2)$ y $(-2, \alpha)$, crece en $(\alpha, 4)$ y $(4, \beta)$, y vuelve a decrecer en $(\beta, +\infty)$. El cambio de signo de f' da un mínimo local en α y un máximo local en β . Usando α, β en la función,

$$f(\alpha) = \frac{22 + 4\sqrt{10}}{9}, \quad f(\beta) = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{9}.$$

e) La gráfica incorpora los cortes, las dos asíntotas verticales, la horizontal y los extremos:



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}; \quad x = \pm 6, \left(0, \frac{9}{2}\right); \quad y = 1; \quad \min_{\text{loc}} f = (\alpha, f(\alpha)), \quad \max_{\text{loc}} f = (\beta, f(\beta)).$$

Problema 4 · Beneficio de una empresa

El beneficio es la diferencia entre ingresos y gastos:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (4x^2 + 800x) - (6x^2 + 460x + 672) = -2x^2 + 340x - 672,$$

donde $x \geq 0$ es el número de unidades. **a)** Para que el producto sea rentable necesitamos $B(x) \geq 0$. Factorizamos:

$$B(x) = -2(x-2)(x-168).$$

La parábola abre hacia abajo, por lo que el beneficio es no negativo entre sus raíces. El mínimo entero de unidades que hace rentable el producto es 2.

b) Al ser una parábola cóncava, su máximo está en el vértice. También puede hallarse resolviendo $B'(x) = 0$:

$$B'(x) = -4x + 340 = 0 \implies x = 85.$$

Como B' pasa de positivo a negativo, este punto es un máximo. Su valor es

$$B(85) = -2(85)^2 + 340(85) - 672 = 13\,778 \text{ €}.$$

c) Con la nueva condición $x \geq 100$, estamos a la derecha del vértice, donde B decrece. Por ello, el máximo permitido se alcanza en $x = 100$:

$$B(100) = -2(100)^2 + 340(100) - 672 = 13\,328 \text{ €}.$$

Rentable para $2 \leq x \leq 168$; $B_{\max} = 13\,778 \text{ €}$ en $x = 85$; $B_{\max, x \geq 100} = 13\,328 \text{ €}$ en $x = 100$.
--

Problema 5 · Extracciones sin reemplazamiento

Hay 10 bolas y se extraen dos sin reemplazamiento. Como el orden no influye, el número total de parejas es $\binom{10}{2} = 45$. Sean I , II y III los sucesos de obtener, respectivamente, el primer, segundo y tercer premio.

a) Los sucesos I y II son incompatibles. Sus probabilidades son

$$P(I) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{1}{45}, \quad P(II) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{3}{45}.$$

Por tanto, $P(I \cup II) = \frac{4}{45}$.

b) Para el tercer premio elegimos una bola blanca y una de las otras ocho bolas:

$$P(III) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45}.$$

c) Obtener algún premio es la unión disjunta de los tres casos. Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(III | I \cup II \cup III) = \frac{P(III)}{P(I) + P(II) + P(III)} = \frac{16/45}{20/45} = \frac{4}{5}.$$

$P(I \cup II) = \frac{4}{45}, \quad P(III) = \frac{16}{45}, \quad P(III \text{premio}) = \frac{4}{5}.$
--

Problema 6 · Fiabilidad de un test

Sean E el suceso «la persona está enferma» y $+$ el suceso «el test da positivo». Los datos son $P(E) = 0,05$, $P(+ | E) = 0,99$ y $P(- | E^c) = 0,95$; por tanto, $P(+ | E^c) = 0,05$ y $P(- | E) = 0,01$.

a) Sumamos los dos casos incompatibles que producen un positivo:

$$P(+) = P(E)P(+ | E) + P(E^c)P(+ | E^c) = 0,05(0,99) + 0,95(0,05) = 0,097.$$

Por Bayes,

$$P(E | +) = \frac{P(E)P(+ | E)}{P(+)} = \frac{0,05(0,99)}{0,097} = \frac{99}{194}.$$

b) Análogamente, $P(-) = 0,95(0,95) + 0,05(0,01) = 0,903$, luego

$$P(E^c | -) = \frac{P(E^c)P(- | E^c)}{P(-)} = \frac{0,95(0,95)}{0,903} = \frac{1805}{1806}.$$

c) El test acierta si la persona está enferma y da positivo, o si está sana y da negativo:

$$P(\text{acierto}) = 0,05(0,99) + 0,95(0,95) = 0,952.$$

d) Si la prevalencia es 1%, repetimos Bayes con $P(E) = 0,01$:

$$P(E | +) = \frac{0,01(0,99)}{0,01(0,99) + 0,99(0,05)} = \frac{1}{6}.$$

$P(E +) = \frac{99}{194}; \quad P(E^c -) = \frac{1805}{1806}; \quad P(\text{acierto}) = 0,952; \quad P(E +)_{P(E)=0,01} = \frac{1}{6}.$
