

Modelo 5 de 2006

Asíntotas, continuidad, sistemas y geometría.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $(1, +\infty)$. Para $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} \sim \frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0.$$

Por tanto, existe la asíntota horizontal $y = 0$. **Opción A - Ejercicio 2**

En $0 < x < 3$, integramos $f'(x) = 2x/3$:

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + C.$$

Como $f(1) = 16/3$, se obtiene $C = 5$, luego $f(x) = x^2/3 + 5$ en ese tramo y $f(3) = 8$. Para $3 \leq x < 4$,

$$f(x) = -x^2 + 8x + K.$$

La continuidad en $x = 3$ exige $-9 + 24 + K = 8$, así que $K = -7$. La función queda

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} + 5, & 0 \leq x < 3, \\ -x^2 + 8x - 7, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

En $x = 1$, $f(1) = 16/3$ y $f'(1) = 2/3$, por lo que la tangente es

$$y - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x - 1).$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix}.$$

Las columnas primera y tercera de A coinciden, por lo que $\det A = 0$ para todo λ . Escribiendo $s = x + z$, el sistema equivale a

$$s - y = 2, \quad s + \lambda y = 8, \quad \lambda s + y = 10.$$

Si $\lambda = -1$, las dos primeras ecuaciones exigen a la vez $s - y = 2$ y $s - y = 8$, luego es SI; además $\text{rg } A = 1$ y $\text{rg } A^* = 2$. Si $\lambda \neq -1$, de las dos primeras $y = 6/(\lambda + 1)$ y $s = y + 2$. La tercera exige $6 + 2\lambda = 10$, por lo que solo $\lambda = 2$ es compatible. En ese caso A tiene rango 2 (el menor de sus dos primeras filas y columnas 1,2 vale 3), y A^* también rango $2 < 3$, luego es SCl. Sus soluciones son

$$(x, y, z) = (4 - t, 2, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para todo $\lambda \neq 2, -1$, $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } A^* = 3$, así que es SI. **Opción A - Ejercicio 4**

La recta se parametriza como

$$r : (x, y, z) = (0, 2, 3) + t(1, 1, 2).$$

Igualemos las distancias a $A = (2, 1, 2)$ y $B = (0, 4, 1)$:

$$|C - A|^2 = |C - B|^2.$$

Al sustituir $C = (t, t + 2, 3 + 2t)$, se obtiene $t = -1$, luego

$$C = (-1, 1, 1).$$

Los vectores desde C a los otros vértices son $A - C = (3, 0, 1)$ y $B - C = (1, 3, 0)$. El área es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$(A - C) \times (B - C) = (-3, 1, 9),$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para que f sea derivable en $x = 2$, primero imponemos continuidad. El límite del segundo tramo es $-4 + \sqrt{2-1} = -3$, así que

$$2a + 4b = -3.$$

Las derivadas laterales deben coincidir. La derivada del primer tramo es $a + 2bx$; la del segundo, $1/(2\sqrt{x-1})$. En $x = 2$,

$$a + 4b = \frac{1}{2}.$$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene $a = -7/2$, $b = 1$. El punto de tangencia es $(2, -3)$ y la pendiente $1/2$, por lo que

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2).$$

Opción B - Ejercicio 2

Las curvas se cortan cuando $x^2 = \lambda\sqrt{x}$. Además de $x = 0$, la intersección positiva r cumple $r^{3/2} = \lambda$. En $[0, r]$, $\lambda\sqrt{x}$ está por encima de x^2 , y el área es

$$\frac{1}{3} = \int_0^r (\lambda\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2\lambda}{3} r^{3/2} - \frac{r^3}{3} = \frac{\lambda^2}{3}.$$

Como $\lambda > 0$, resulta $\lambda = 1$. **Opción B - Ejercicio 3**

(a) La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero. En este caso,

$$\det A = 2(m - 3),$$

por lo que $m = 3$.

(b) Para $m = 3$, el sistema homogéneo tiene matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sus dos primeras ecuaciones dan $y = -x$ y $z = -2x - y = -x$; la tercera queda entonces satisfecha. Por tanto,

$$(x, y, z) = t(1, -1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Un plano paralelo a $x + y + z = 1$ tiene ecuación $x + y + z = k$. Sus cortes con los ejes son $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ y $(0, 0, k)$, que forman un triángulo de área

$$S = \frac{1}{2} |(0, k, 0) \times (-k, 0, k)| = \frac{\sqrt{3}}{2} k^2.$$

Al igualar a $18\sqrt{3}$, resulta $k^2 = 36$. Las dos soluciones son

$$x + y + z = 6 \quad \text{o} \quad x + y + z = -6.$$