

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de coincidencias de 2023

Se resuelven las ocho preguntas para ofrecer el desarrollo completo. En la prueba basta con contestar a cuatro.

Pregunta A.1 - Rango, inversa y sistema homogéneo

Consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Rango según el parámetro

Como A es cuadrada de orden 3, si su determinante es distinto de cero su rango es 3. Calculamos

$$\det A = 2a(3a + 6) - (a^2 + 6a + 6) + (a - 3a - 3) = 5a^2 + 4a - 9 = (a - 1)(5a + 9).$$

Por tanto, $\det A = 0$ para $a = 1$ o $a = -\frac{9}{5}$. Para esos valores el rango es menor que 3. El menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 5a,$$

que no se anula ni en $a = 1$ ni en $a = -\frac{9}{5}$; por ello el rango es al menos 2 en ambos casos. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq 1, -\frac{9}{5}$, y $\text{rg}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -\frac{9}{5}$.

b) Inversa para $a = 0$

Para que exista la inversa, el determinante debe ser no nulo. En este caso,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A_0) = -9 \neq 0.$$

Así pues, A_0 es invertible. Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)$, obtenemos

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

La comprobación por multiplicación da $A_0 A_0^{-1} = I_3$.

c) Sistema homogéneo para $a = 1$

Al sustituir $a = 1$, la primera y la tercera ecuación coinciden:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x + 3y - 6z = 0. \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones independientes y tres incógnitas, por lo que esperamos una familia con un parámetro. Tomamos $z = t$. De la primera, $y = -2x - t$; al sustituir en la segunda,

$$x + 3(-2x - t) - 6t = 0 \implies -5x - 9t = 0 \implies x = -\frac{9}{5}t.$$

Entonces $y = \frac{13}{5}t$. Si reparametrizamos para evitar fracciones, resulta **Conclusión.** La solución es $(x, y, z) = s(-9, 13, 5)$, con $s \in \mathbb{R}$.

Pregunta A.2 - Tangente de pendiente mínima y área

La función $f(x) = x^3 + x^2 + x$ es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$.

a) Recta tangente de pendiente mínima

La pendiente de la tangente en un punto de abscisa x es $f'(x)$. Derivamos y buscamos el mínimo de esa pendiente:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad f''(x) = 6x + 2.$$

Como $f''(x) = 0$ en $x = -\frac{1}{3}$, y f' es una parábola abierta hacia arriba, f' alcanza allí su mínimo. La pendiente mínima es

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{27}.$$

La ecuación punto-pendiente de la tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$. Por tanto,

$$y + \frac{7}{27} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) \implies$$

Conclusión. La recta tangente de pendiente mínima es $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$.

b) Área entre $f(x)$ e $y = x$

Los puntos de corte se obtienen igualando las funciones:

$$x^3 + x^2 + x = x \iff x^2(x + 1) = 0,$$

de modo que $x = -1$ y $x = 0$. En $[-1, 0]$, $f(x) - x = x^2(x + 1) \geq 0$, así que f está por encima de la recta. El área es

$$\int_{-1}^0 (f(x) - x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{12}.$$

Conclusión. El área encerrada es $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas.

Pregunta A.3 - Planos y paralelepípedo

Escribimos los planos en forma general:

$$\pi_1 : x - y = 0, \quad \pi_2 : x - y + 1 = 0, \quad \pi_3 : z + 1 = 0, \quad \pi_4 : z - 1 = 0.$$

a) Paralelismo

Los vectores normales de π_1, π_2 son ambos $(1, -1, 0)$; al ser proporcionales y distintos los planos, son paralelos. Los normales de π_3, π_4 son $(0, 0, 1)$, por lo que también son paralelos. **Conclusión.** $\pi_1 \parallel \pi_2$ y $\pi_3 \parallel \pi_4$.

b) Perpendicularidad

Dos planos son perpendiculares cuando sus vectores normales tienen producto escalar nulo. Se cumple

$$(1, -1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Por ello, cada uno de π_1, π_2 es perpendicular a cada uno de π_3, π_4 . **Conclusión.** Los cuatro pares indicados son perpendiculares.

c) Recta paralela a los cuatro planos

Un vector director paralelo a los cuatro planos debe ser perpendicular a sus normales. El vector $(1, 1, 0)$ cumple

$$(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 0) = 0, \quad (1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

La recta que pasa por $(1, 0, 2)$ y tiene ese vector director, en forma paramétrica, es **Conclusión.** $r : x = 1 + t, y = t, z = 2, t \in \mathbb{R}$.

d) Planos adicionales y volumen

Un plano perpendicular a los cuatro dados debe tener un vector normal perpendicular a los normales $(1, -1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Podemos tomar $(1, 1, 0)$; por tanto, los planos buscados serán de la forma $x + y = c$.

Tomemos $x + y = 0$ y $x + y = 1$, o en forma general $x + y = 0$ y $x + y - 1 = 0$. Para comprobar el volumen, usamos las coordenadas $u = x - y, v = z, w = x + y$. Sus límites entre los seis planos son $-1 \leq u \leq 0, -1 \leq v \leq 1$ y $0 \leq w \leq 1$. Como $x = (u + w)/2, y = (w - u)/2$, el valor absoluto del jacobiano de este cambio es $1/2$. Así, el volumen es

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Conclusión. Una pareja válida es $x + y = 0$ y $x + y - 1 = 0$; el paralelepípedo comprendido entre los seis planos tiene volumen 1.

Pregunta A.4 - Probabilidad de golpes críticos

a) Cinco ataques

Definimos X como el número de golpes críticos entre los cinco ataques. Un ataque es crítico si sale cara y, después, un 9 o un 10; como ambas condiciones deben ocurrir, multiplicamos sus probabilidades:

$$p = P(\text{crítico}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10}.$$

Los ataques son ensayos independientes con la misma probabilidad de éxito, luego $X \sim \text{Bin}(5, 0,1)$. «Tres o menos» significa $X \leq 3$. Es más sencillo calcular el complementario:

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{4}(0,1)^4(0,9) - (0,1)^5 = 0,99954.$$

Conclusión. La probabilidad de obtener como máximo tres golpes críticos es 0,99954.

b) Cien ataques

Sea $X \sim \text{Bin}(100, 0,2)$. Como n es grande, aproximamos por una normal de media $\mu = np = 20$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4$, aplicando corrección de continuidad:

$$P(15 \leq X \leq 25) \simeq P(14,5 < Y < 25,5), \quad Y \sim N(20, 4).$$

Al tipificar,

$$P(14,5 < Y < 25,5) = P(-1,375 < Z < 1,375) = 2\Phi(1,375) - 1.$$

Con la tabla, $\Phi(1,38) \simeq 0,9162$, de donde la aproximación pedida es 0,8324. **Conclusión.** La probabilidad aproximada es 0,8324, es decir, un 83,24 %.

Pregunta B.1 - Alimentación del quebrantahuesos

Sean g, c, p los gramos diarios de grasas, carbohidratos y proteínas, respectivamente. La masa total proporciona una ecuación y el aporte energético otra; además, el enunciado relaciona carbohidratos y proteínas:

$$\begin{cases} g + c + p = 500, \\ 9g + 4c + 4p = 2500, \\ c = 2p + 40. \end{cases}$$

Como carbohidratos y proteínas aportan ambos 4 kcal por gramo, restamos cuatro veces la primera ecuación de la segunda:

$$5g = 500 \implies g = 100.$$

Entonces $c + p = 400$. Junto con $c = 2p + 40$, queda

$$2p + 40 + p = 400 \implies p = 120, \quad c = 280.$$

Convertimos ahora los gramos a kilocalorías con los aportes energéticos indicados:

$$9g = 900, \quad 4c = 1120, \quad 4p = 480.$$

Conclusión. El ave recibe 900 kcal de grasas, 1120 kcal de carbohidratos y 480 kcal de proteínas al día.

Pregunta B.2 - Asíntotas, crecimiento y extremos

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{(x+1)^2}.$$

El denominador se anula en $x = -1$, de modo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Factorizamos el numerador:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

Su signo cambia en -1 y 2 ; por eso, teniendo en cuenta el valor absoluto,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+1}, & x < -1 \text{ o } x \geq 2, \\ \frac{2-x}{x+1}, & -1 < x < 2. \end{cases}$$

a) Asíntotas

En $x = -1$ se anula el denominador y el numerador original tiende a 3. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty,$$

así que $x = -1$ es una asíntota vertical. Para $x \rightarrow \pm\infty$ usamos la primera expresión:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1.$$

Conclusión. La gráfica tiene asíntota vertical $x = -1$ y asíntota horizontal $y = 1$ en ambos extremos.

b) Crecimiento y extremos

Derivamos por tramos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x+1)^2}, & x < -1 \text{ o } x > 2, \\ -\frac{3}{(x+1)^2}, & -1 < x < 2. \end{cases}$$

La derivada es positiva en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$, y negativa en $(-1, 2)$; así, la función crece en los primeros intervalos y decrece en el segundo. En $x = 2$, $f(2) = 0$ y la función pasa de decrecer a crecer, por lo que tiene un mínimo relativo (también absoluto). No hay máximo relativo. **Conclusión.** Crece en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$, decrece en $(-1, 2)$ y presenta un mínimo en $(2, 0)$.

Pregunta B.3 - Recta y planos

La recta debe expresarse en forma paramétrica:

$$r: \quad x = 1 + 3t, \quad y = t, \quad z = -2 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director es $\vec{d} = (3, 1, -1)$. Los vectores normales de los planos son $\vec{n} = (1, 2, 2)$ y $\vec{n}' = (2, 2, 1)$.

a) Intersección de planos y ángulo

Como $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ no son proporcionales, los planos se cortan en una recta. El ángulo agudo entre ellos se obtiene mediante el coseno del ángulo entre sus normales:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|} = \frac{|2 + 4 + 2|}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}.$$

Conclusión. Los planos se cortan y forman un ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{8}{9}\right)$.

b) Posición relativa de r y π

Una recta es paralela al plano si su vector director es perpendicular al normal. Aquí

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 3 + 2 - 2 = 3 \neq 0,$$

por lo que la recta corta al plano en un punto. Sustituimos la parametrización en $x + 2y + 2z - 1 = 0$:

$$(1 + 3t) + 2t + 2(-2 - t) - 1 = 0 \implies t = \frac{4}{3}.$$

Conclusión. r corta a π en $P\left(5, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

c) Puntos equidistantes de los planos

Para un punto P , su distancia al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ambos normales tienen módulo 3, por lo que al imponer la igualdad de distancias en un punto de r basta igualar los valores absolutos de las expresiones de los planos:

$$|3t - 4| = |7t + 4|.$$

Resolvemos los dos casos:

$$3t - 4 = 7t + 4 \implies t = -2, \quad 3t - 4 = -(7t + 4) \implies t = 0.$$

Al sustituir en la recta obtenemos los dos puntos solicitados. **Conclusión.** Los puntos son $(-5, -2, 0)$ y $(1, 0, -2)$.

Pregunta B.4 - Probabilidad y Bayes

Definimos C : «compra algún artículo» y J : «tiene menos de 50 años». Del enunciado:

$$P(C) = \frac{7}{20}, \quad P(\bar{C}) = \frac{13}{20}, \quad P(J | \bar{C}) = 0,75, \quad P(\bar{J} | C) = 0,80.$$

a) Probabilidad de que sea menor de 50 años

Los casos «compra» y «no compra» son incompatibles y cubren todos los clientes; por tanto sumamos las probabilidades de los caminos que terminan en J :

$$P(J) = P(J | C)P(C) + P(J | \bar{C})P(\bar{C}) = 0,20 \cdot 0,35 + 0,75 \cdot 0,65 = 0,5575.$$

Conclusión. La probabilidad de que el cliente tenga menos de 50 años es 0,5575, es decir, un 55,75 %.

b) Probabilidad de no comprar sabiendo que tiene al menos 50 años

Aplicamos la probabilidad condicionada:

$$P(\bar{C} | \bar{J}) = \frac{P(\bar{C} \cap \bar{J})}{P(\bar{J})} = \frac{P(\bar{J} | \bar{C})P(\bar{C})}{1 - P(J)} = \frac{0,25 \cdot 0,65}{1 - 0,5575} = \frac{65}{177} \approx 0,3672.$$

El numerador corresponde a clientes mayores o iguales que 50 años que no compran; el denominador, a todos los clientes de esa edad. **Conclusión.** La probabilidad pedida es $\frac{65}{177} \approx 0,3672$.