

Características de la prueba.

Se elegirán TRES bloques y se hará un problema de cada uno de ellos.

Cada problema se puntuará de 0 a 3,3, según la puntuación máxima de cada apartado.

La suma de las puntuaciones más 0,1 será la calificación de la prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos o gráficos deben estar debidamente justificados.

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL.

Problema 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{cases}$$
, se pide:

- Justificar que para cualquier valor del parámetro real α , el sistema tiene solución única. (1 punto).
- Hallar la solución del sistema en función del parámetro α . (1,3 puntos).
- Determinar el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$. (1 punto).

Problema 1.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX = \alpha X$. (1,5 puntos).
- Resolver la ecuación matricial $AX = 2X$. (1,8 puntos).

Bloque 2. GEOMETRÍA.

Problema 2.1. Dado el plano $\pi: 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q = (2, 1, 3)$, se pide calcular:

- La distancia del punto Q al plano π . (1,1 puntos).
- El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. (1,1 puntos).
- El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q . (1,1 puntos).

Problema 2.2. Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones

$\pi_1: x + 2y + z + 3 = 0$; $\pi_2: 2x + y - z - 6 = 0$, se pide:

- Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2 . (1,1 puntos).
- Calcular la ecuación paramétrica de la recta r , intersección de los planos π_1 y π_2 . (1,1 puntos).
- Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2 , es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos π_1 y π_2 , donde α es el ángulo obtenido en el apartado a). (1,1 puntos).

Bloque 3. ANÁLISIS.

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

- Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ (1,6 puntos).

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(0) = 0$. (1,7 puntos).

Problema 3.2. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \frac{4}{x}$.

- a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. (1,8 puntos).
- b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$. (1,5 puntos).

Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Problema 4.1. Se tienen dos programas informáticos A y B . Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B . (3,3 puntos).

- Problema 4.2.** El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0, 2)$. Se pide:
- a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. (0,8 puntos).
- b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. (1,6 puntos).
- c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? (0,9 puntos).