

Problema 1.1. Dado el sistema dependiente del parámetro real α
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$
, se pide:

- Determinar, razonadamente los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (1,3 puntos).
- Resolver el sistema cuando es compatible determinado. (1,3 puntos).
- Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (0,7 puntos).

Solución:

- a) Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array} \right)$$

A es una matriz 3×3 , luego el máximo rango de A será 3

A' es una matriz 3×4 , luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rango de A

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Soluciones: $\alpha = 1$ y $\alpha = -2$

Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, $|A| \neq 0$ luego $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D

Para $\alpha = -2$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$ luego el rango de A será menor o igual que 2, como el menor de A

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Ahora calculemos el rango de A' . Orlando el menor anterior de A , no nulo, con 3ª fila y 4ª columna de A' ,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9 \neq 0 \quad \text{luego} \quad \text{ran}(A') = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, Sistema Incompatible

Para $\alpha = 1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como esta matriz tiene todas sus filas (o columnas) iguales para estudiar su rango sólo debemos considerar una fila, la 1ª por ejemplo, como esta fila tiene elementos no nulos $\text{ran}(A') = 1$. Lo mismo ocurre con la matriz A, por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 1 < 3 = n^\circ$ de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado.

b) Resolvamos el sistema para $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

Utilizaremos los resultados obtenidos en el apartado a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - 1 - \alpha}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} =$$

Como las raíces del polinomio $\alpha^3 - 3\alpha + 2$ son (obtenido en a)) $\alpha = 1$ doble y $\alpha = -2 \Rightarrow$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)$$

Siguiendo con el cálculo de x,

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \text{como } \alpha \neq 1 \text{ podemos simplificar por } \alpha - 1 = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

como $\alpha \neq -2$ la solución anterior existe puesto que el denominador es no nulo.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - 1 - \alpha - \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\alpha^2 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - 1}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)} = \frac{1}{(\alpha + 2)}$$

Cuando el sistema es compatible determinado la solución es: $x = y = z = \frac{1}{\alpha - 2}$

c) Solución para $\alpha = 0$

Como 0 es distinto de -2 y 1 , para este valor de α obtendremos la solución del sistema usando el resultado del apartado anterior. Es decir,

$$x = y = z = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

Para $\alpha = 0$ la solución del sistema es $x = y = z = \frac{1}{2}$

Problema 1.2. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$

Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3 . (1,8 puntos).

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$. (1,8 puntos).

Solución:

a)

Cálculo de A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \cdot 17 - 29 \cdot 10 & 17 \cdot 29 - 29 \cdot 17 \\ -10 \cdot 17 + 17 \cdot 10 & -10 \cdot 29 + 17 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^2 = -I$

Cálculo de A^3

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^3 = -A = -\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Utilizaremos los resultados del anterior apartado $A^2 = -I$ y $A^3 = -A$

$$(I + A)^3 = (I + A)^2(I + A)$$

$$(I + A)^2 = (I + A)(I + A) = I \cdot I + I \cdot A + A \cdot I + A \cdot A = I + A + A + A^2 = I + 2A - I = 2A$$

$$(I + A)^3 = 2A(I + A) = 2AI + 2AA = 2A + 2A^2 = 2A - 2I = -2I + 2A$$

por lo que $\alpha = -2$ y $\beta = 2$

Problema 2.1. Se dan los puntos $A = (2, 1, 1)$ y $B = (1, 0, -1)$, y la recta r de ecuación $r: x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$

Se pide calcular razonadamente:

- El punto C de r que equidista de A y B . (2 puntos).
- El área del triángulo ABC . (1,3 puntos).

Solución:

a)

Buscamos $C \in r \mid d(A, C) = d(B, C)$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta r ; como conocemos su ecuación en forma continua es fácil escribir la ecuación paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por lo que las coordenadas de cualquier punto de la recta r , en particular del C que buscamos, son

$$(5 + \lambda, \lambda, -2 - 2\lambda)$$

Calculemos las distancias indicadas,

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{(5 + \lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)^2 + (-2 - 2\lambda - 1)^2} = \sqrt{(3 + \lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + (-3 - 2\lambda)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 6\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9 + 12\lambda + 4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B, C) &= \sqrt{(5 + \lambda - 1)^2 + (\lambda - 0)^2 + (-2 - 2\lambda + 1)^2} = \sqrt{(4 + \lambda)^2 + (\lambda)^2 + (-1 - 2\lambda)^2} = \\ &= \sqrt{16 + 8\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 + 1 + 4\lambda + 4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17} \end{aligned}$$

Igualándolas:

$$\sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17}$$

Resolvemos la ecuación planteada elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$6\lambda^2 + 16\lambda + 19 = 6\lambda^2 + 12\lambda + 17 \rightarrow 4\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Comprobemos que esta solución lo es de la ecuación irracional inicial,

$$\sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17}$$

$$\sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{-1}{2}\right) + 19} = \sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{-1}{2}\right) + 17}$$

$$\sqrt{6\frac{1}{4} - 8 + 19} = \sqrt{6\frac{1}{4} - 6 + 17}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} + 11} = \sqrt{\frac{3}{2} + 11} \quad \text{cierto, luego } \lambda = \frac{-1}{2} \text{ es válida.}$$

$$\text{Y finalmente } C = \left(5 - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2 - 2\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$$

Otra forma de resolverlo,

Calculamos el siguiente plano:

π plano que pasa por $PM_{\overline{AB}}$ y $\perp \overrightarrow{AB}$

$$PM_{\overline{AB}} \left(\frac{2+1}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{AB} (1-2, 0-1, -1-1) = (-1, -1, -2) \approx (1, 1, 2)$$

La ecuación del plano será: $x + y + 2z + D = 0$, con la condición de que pase por

$PM_{\overline{AB}}$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow 2 + D = 0 \rightarrow D = -2$$

$$\pi: x + y + 2z - 2 = 0$$

El punto C será el de corte entre la recta r y el plano π

$$5 + \lambda + \lambda + 2(-2 - 2\lambda) - 2 = 0$$

$$5 + \lambda + \lambda - 4 - 4\lambda - 2 = 0$$

$$-1 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\text{luego } C = \left(5 - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1 \right)$$

b) Área del triángulo ABC

$$A = (2, 1, 1) \text{ y } B = (1, 0, -1) \text{ y } C = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1 \right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2 \right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{vmatrix} = \vec{i}(2-3) - \vec{j}(2+5) + \vec{k}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) =$$

$$= (-1, -7, 4)$$

$$\text{y } |(-1, -7, 4)| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{1+49+16} = \sqrt{66}$$

$$\text{y el área será } \frac{1}{2} \sqrt{66} = \frac{\sqrt{66}}{2} \text{ u.a.}$$

Problema 2.2. Dadas la recta r , intersección de los planos $y + z = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$, y la recta s de ecuación

$$s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3, \text{ se pide}$$

- Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de r y s . (1,1 puntos).
- Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas r y s . (1,1 puntos).
- Calcular la distancia entre las rectas r y s . (1,1 puntos).

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de r

Resolvamos el sistema de ecuaciones que define la recta r

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

podemos resolver el sistema anterior usando x e y como incógnitas principales,

$$\begin{cases} y = -z \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2z - 1}{-1} = -2z + 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{z}{-1} = -z$$

$$\text{Por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta } r \text{ serán: } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas de s

$$s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3$$

$$\text{la ecuación continua será } \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\text{y la paramétrica } \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

b) Posición relativa de r y s .

Estudiemos el sistema que plantearíamos para buscar el punto de corte entre las rectas,

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda = 2\mu \\ -\lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 3 - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 3 \end{cases}$$

$$\text{La matriz ampliada del sistema } \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

En la matriz de coeficientes, A , vemos que $C_1 = C_2$ y que tiene elementos no nulos, luego $\text{ran}(A) = 1$

En la matriz ampliada, como $C_1 = C_2$ $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Como $\text{ran}(A) = 1$ y $\text{ran}(A') = 2$, las rectas r y s son paralelas.

c) Como las rectas r y s son paralelas

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} \times \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_s}|}$$

$$\begin{aligned} P_r(1, 0, 0) &\rightarrow \overrightarrow{P_s P_r}(1, -1, -3) \\ P_s(0, 1, 3) & \\ \overrightarrow{v_s}(2, 1, -1) & \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+3) - \vec{j}(-1+6) + \vec{k}(1+2) = (4, -5, 3)$$

$$|\overrightarrow{P_s P_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{v_s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Por lo que } d(r, s) = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ u.l.}$$

Problema 3.1. Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva $y = \frac{1}{4+x^2}$.

- Calcular razonadamente el área de la región R. (1,5 puntos).
- Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B. (1,8 puntos).

Solución:

a) Representación gráfica de $y = \frac{1}{4+x^2}$

Dom $y = R$

$4+x^2=0$; $x^2 = -4$ no tiene soluciones reales, Dom $y = R$

Puntos de corte con ejes coordenados $(0, \frac{1}{4})$

$x = 0$; $y = \frac{1}{4}$

$y = 0$; $0 = 1$ no hay solución

Asíntotas

No tiene asíntota vertical ya que el dominio de la función es R horizontal,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

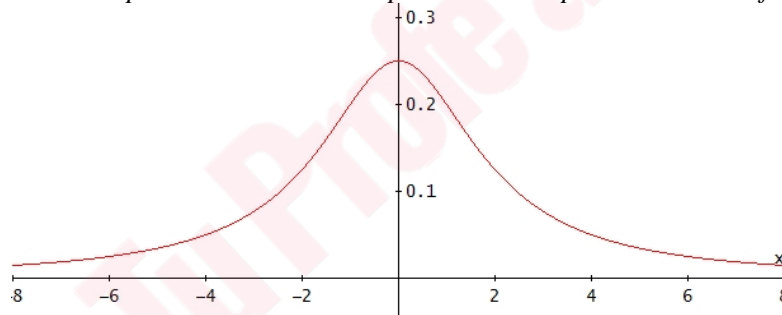
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

por lo tanto $y = 0$ es la a. h.

oblicua, no tiene ya que es un cociente de polinomios con a. horizontal

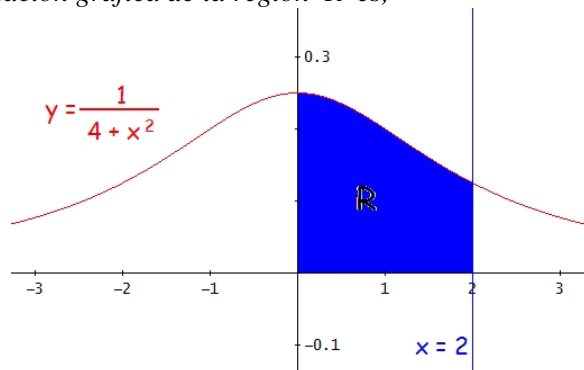
$\forall x \in \mathbb{R}, 4+x^2 > 0 \rightarrow \frac{1}{4+x^2} > 0$ La función está por encima del eje OX

A partir de estos datos podemos hacer una representación aproximada de la función dada,



Esta representación es suficiente para resolver el problema.

La representación gráfica de la región R es,

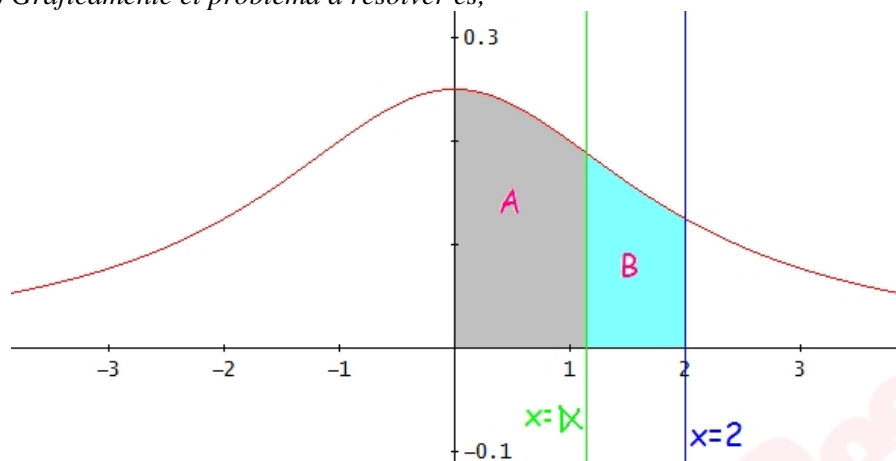


Por lo tanto el cálculo de su área lo realizamos mediante la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx &= \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{4} + \frac{x^2}{4}} dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{2}{2} - \operatorname{arctg} \frac{0}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Luego el área de la región R mide $\frac{\pi}{8} u.a.$

b) Gráficamente el problema a resolver es,



de forma que $\text{Área}(A) = 2 \text{Área}(B)$

Cálculo del área de A, (utilizamos parte del cálculo integral realizado en el apartado anterior)

$$\text{Área}(A) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{arctg} \frac{0}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{arctg} 0 \right] = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2}$$

Cálculo del área de B,

$$\text{Área}(B) = \int_{\alpha}^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{2}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2}$$

Por lo que,

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} = 2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3 \cdot 4}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1,1547$$

Problema 3.2. Se considera la función real $f(x) = x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

- La gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 puntos).
- Los valores de x para los que está definida la función real $g(x) = \ln f(x)$. (1,3 puntos).
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. (1,3 puntos).

Solución:

a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.

a1) Como $y = x^2 - 4$ es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.

Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$$

$$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4; \quad \text{dos soluciones: } x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -2$$

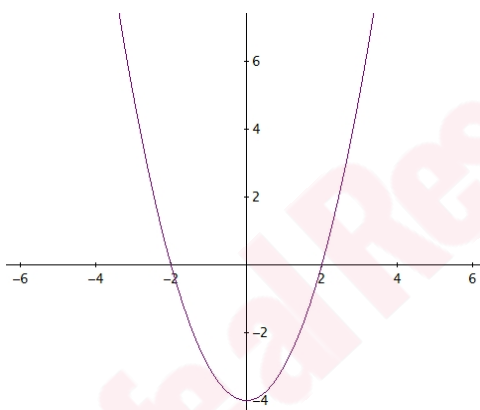
Los puntos de corte son $(0, -4)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Vértice de la parábola,

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \rightarrow y = -4$$

El vértice es $(0, -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ es



a2) $y = x^2 - 4$ tratada como función.

Dom $y = \mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$$

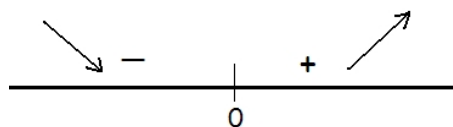
$$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4; \quad \text{dos soluciones: } x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -2$$

Los puntos de corte son $(0, -4)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Monotonía, signo de y'

$$y' = 2x$$

$$2x = 0; \quad x = 0$$

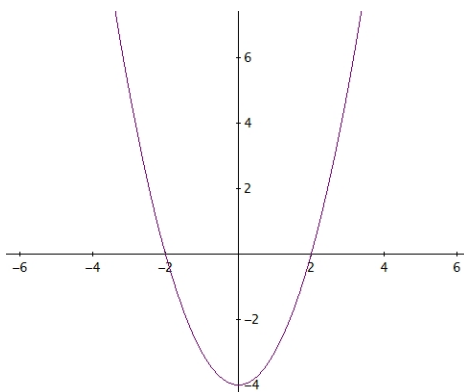


Decreciente $(-\infty, 0)$

Creciente $(0, +\infty)$

Mínimo relativo $(0, -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ es



b) $g(x) = \ln(x^2 - 4)$. Buscamos el dominio de $g(x)$

$x^2 - 4 > 0$, considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de $g(x)$,

$$\text{Dom } g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

c) Monotonía de $g(x)$

$$g(x) = \ln(x^2 - 4)$$

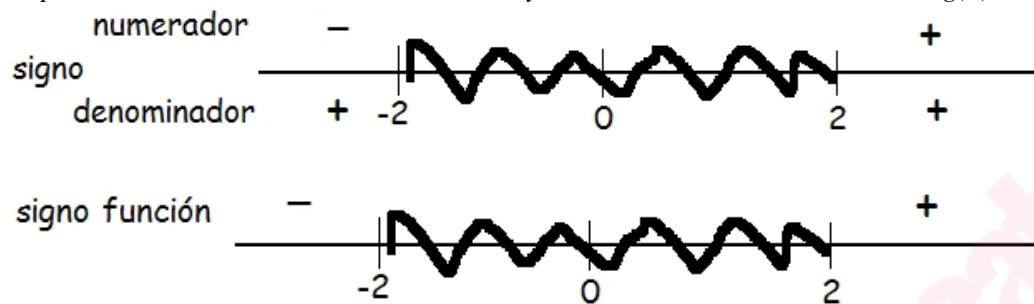
$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

estudiemos el signo de $g'(x)$, para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,

$$2x = 0; x = 0$$

$$x^2 - 4 = 0; \text{ dos soluciones: } x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -2$$

Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de $g(x)$, obtenemos



Por lo tanto $g(x)$ es
 Decreciente $(-\infty, -2)$
 Creciente $(2, +\infty)$

$Y g(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si $g(x)$ tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.

$$\text{Dom } g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Puntos de corte con eje OX,

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow \ln(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 1 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2,23 \in \text{Dom } g(x) \rightarrow \\ &\rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ &\rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{aligned}$$

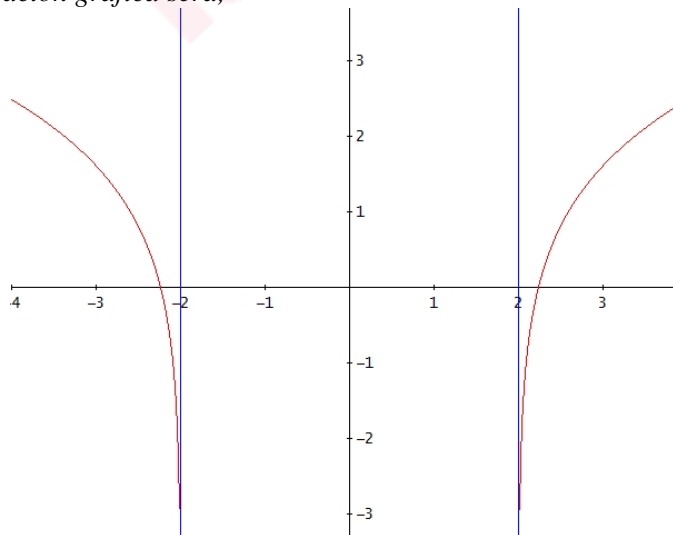
no hay corte con el eje OY porque $x = 0$ no es del dominio de $g(x)$

Asíntota vertical,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(x^2 - 4) = \ln 0 = -\infty \rightarrow x = -2 \text{ es a.v.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 4) = \ln 0 = -\infty \rightarrow x = 2 \text{ es a.v.}$$

La representación gráfica será,



Luego $g(x)$ no tiene máximo absoluto.

Problema 4.1. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo. (3,3 puntos).

Solución:

El formato y dimensiones de la hoja que se utiliza es:

	<i>Dimensiones de la hoja:</i> Largo: y Ancho: x <i>Consumo de papel:</i> $x y$ <i>La relación entre x e y viene dada por el área que ocupa el texto impreso:</i> $(y-4)(x-2) = 18 \rightarrow y-4 = \frac{18}{x-2} \rightarrow y = 4 + \frac{18}{x-2}$ <i>Por la forma de la propaganda los valores de x e y deben cumplir que: $x > 2$ e $y > 4$</i>
--	---

La función que debemos minimizar, $C(x)$, consumo de papel, será:

$$C(x) = x y = x \left(4 + \frac{18}{x-2} \right) = 4x + \frac{18x}{x-2}$$

por la condición que debe cumplir el valor de x deducimos que $\text{Dom } C(x) = (2, +\infty)$

Busquemos los extremos relativos de la función $C(x)$.

$$C' = 4 + \frac{18(x-2) - 18x}{(x-2)^2} = 4 + \frac{18(x-2) - 18x}{(x-2)^2} = 4 + \frac{18x - 36 - 18x}{(x-2)^2} = 4 + \frac{-36}{(x-2)^2} = 4 - \frac{36}{(x-2)^2}$$

$$C' = 0 \rightarrow 4 - \frac{36}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 4 = \frac{36}{(x-2)^2} \rightarrow 4(x-2)^2 = 36 \rightarrow (x-2)^2 = 9 \rightarrow x-2 = \pm\sqrt{9}$$

$$x-2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \rightarrow x = 5 \\ x-2 = -3 \rightarrow x = -1 \end{cases} \text{ solución no válida pues } x > 2$$

Calculemos C'' para determinar el tipo de extremo.

Expresemos C' de la siguiente forma, $C'(x) = 4 - 36(x-2)^{-2}$

$$C''(x) = -36(-2)(x-2)^{-3} = 72(x-2)^{-3} = \frac{72}{(x-2)^3}$$

$$\text{para } x = 5, \quad C'' = \frac{72}{(5-2)^3} = \frac{72}{27} > 0 \rightarrow x = 5 \text{ mínimo relativo}$$

Comprobemos que este mínimo relativo es absoluto estudiando la función $C(x)$. Como el dominio de esta función es un intervalo calculamos sus límites en los extremos del intervalo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4x + \frac{18}{x-2} \right) = 8 + (+\infty) = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow (x-2) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{18}{x-2} \rightarrow +\infty$$

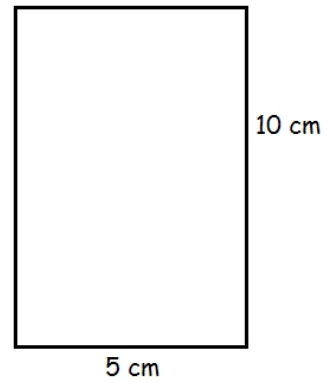
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x + \frac{18}{x-2} \right) = (+\infty) + 0 = +\infty$$

Luego el mínimo relativo anterior es un mínimo absoluto. Nos falta calcular el valor de y ,

$$\text{para } x = 5 \quad y = 4 + \frac{18}{5-2} = 4 + \frac{18}{3} = 4 + 6 = 10$$

Solución:

El consumo de papel es mínimo para una hoja de papel de 5 cm. x 10 cm.

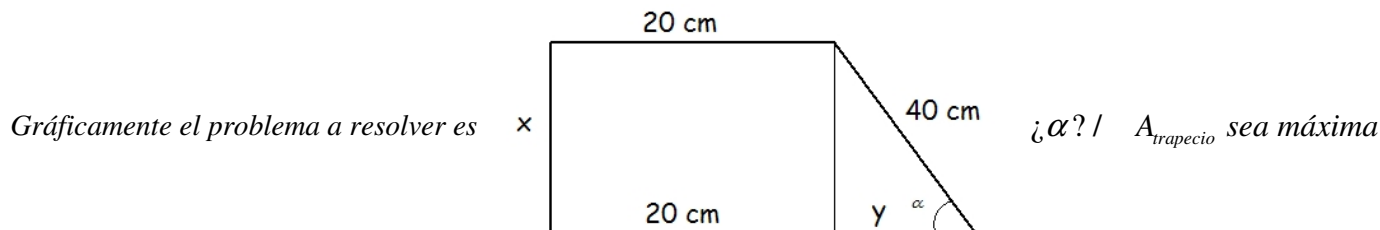


Tu Profe al Rescate

Problema 4.2. Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. (3,3 puntos).

Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros dos lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.

Solución:



$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{((20+y)+20)x}{2}$$

Calculemos los valores de x e y en función del ángulo. En el triángulo rectángulo de la figura se obtiene:

$$\text{sen } \alpha = \frac{x}{40} \rightarrow x = 40 \text{ sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{y}{40} \rightarrow y = 40 \text{ cos } \alpha$$

$$\text{luego } A(\alpha) = \frac{((20+40 \text{ cos } \alpha)+20) 40 \text{ sen } \alpha}{2} = \frac{(40+40 \text{ cos } \alpha) 40 \text{ sen } \alpha}{2} = (40+40 \text{ cos } \alpha) 20 \text{ sen } \alpha$$

Por construcción de la figura α deber ser un ángulo agudo, luego $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

La función A es una función continua por serlo las funciones seno y coseno y porque las operaciones que intervienen en su definición (suma y producto) también son continuas.

Procedamos a obtener el máximo de la función A

$$A' = -40 \text{ sen } \alpha \cdot 20 \text{ sen } \alpha + (40+40 \text{ cos } \alpha) 20 \text{ cos } \alpha = -800 \text{ sen}^2 \alpha + 800 \text{ cos } \alpha + 800 \text{ cos}^2 \alpha =$$

$$\text{sabemos que } \forall \alpha, \text{ sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$$

$$= -800 (1 - \text{cos}^2 \alpha) + 800 \text{ cos } \alpha + 800 \text{ cos}^2 \alpha = -800 + 800 \text{ cos}^2 \alpha + 800 \text{ cos } \alpha + 800 \text{ cos}^2 \alpha =$$

$$= 1600 \text{ cos}^2 \alpha + 800 \text{ cos } \alpha - 800$$

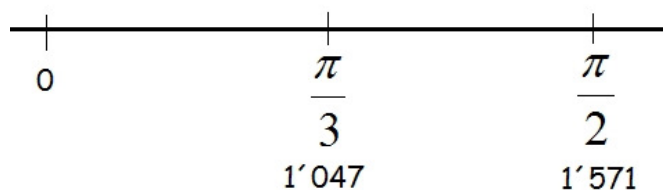
$$A' = 0 \rightarrow 1600 \text{ cos}^2 \alpha + 800 \text{ cos } \alpha - 800 = 0 \rightarrow 2 \text{ cos}^2 \alpha + \text{cos } \alpha - 1 = 0$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{cos } \alpha = -1 \rightarrow \alpha = \pi \text{ solución no válida, ya que } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Para determinar si la solución es máximo estudiemos el signo de A' a ambos lados de la solución obtenida para $A' = 0$.

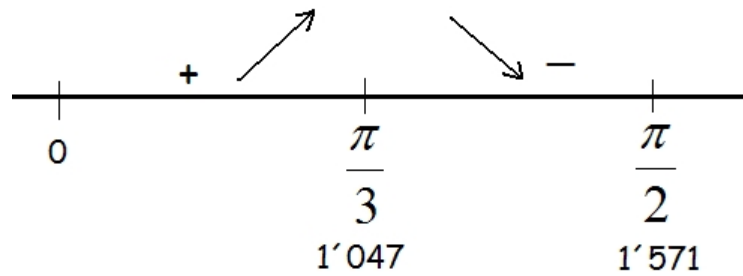


Estudiamos el signo de A' en puntos intermedios de los dos intervalos en que está dividido el dominio de A ,

$$\alpha = 0.5 \quad A' = 1600 \cos^2 0.5 + 800 \cos 0.5 - 800 = 1134.3079 > 0$$

$$\alpha = 1.3 \quad A' = 1600 \cos^2 1.3 + 800 \cos 1.3 - 800 = -471.5119 < 0$$

Tenemos el siguiente resultado:



Luego la función A tiene un máximo relativo para $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Como la función A , que es continua, es creciente a la izquierda de este valor y decreciente a su derecha, este máximo relativo es absoluto.

$$\text{Para } \alpha = \frac{\pi}{3} \quad A = \left(40 + 40 \cos \frac{\pi}{3} \right) 20 \sin \frac{\pi}{3} = \left(40 + 40 \cdot \frac{1}{2} \right) 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$$

Por lo tanto, para que el área de la ventana sea máxima el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rds y este área medirá $600\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Tu Profeta al Rescate