

BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} I & 0 & I \\ -I & 2 & -I \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I & I & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Se pide

- Demostrar que $C - A B^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- Calcular la matriz X que verifica $C X = A B^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- Justificar que $(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-I \\ -2m & m^2 & I \\ 0 & 2m & I \end{pmatrix}$. Determinar:

- El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - I \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- Indicar justificadamente la posición relativa de las rectas r y s . (5 puntos)
- Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

- Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)

- b) Calcular el punto P' que es el simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_I . (4 puntos)
- c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_I y r . (3 puntos)

Problema 5. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$. Obtener:

- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
- d) La integral de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

- a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
- b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)