

Julio de 2021 · Convocatoria extraordinaria

El examen permite escoger tres de los seis problemas. Resolvemos los seis para que estén disponibles todas las soluciones.

Problema 1 · Sistema de ecuaciones con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} 2x - y + z = m, \\ x + y + 3z = 0, \\ 5x - 4y + mz = m. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es A , y A^* es la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}.$$

a) Discusión según el parámetro m

Calculamos el determinante de A desarrollándolo por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & m \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 2(m + 12) + (m - 15) - 9 \\ &= 3m. \end{aligned}$$

Si $m \neq 0$, el determinante no es cero. Por tanto,

$$\operatorname{rg}(A) = 3.$$

La matriz ampliada contiene las tres columnas de A , así que también tiene rango 3. Como hay tres incógnitas, el teorema de Rouché-Frobenius da

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3 \implies \text{ sistema compatible determinado (SCD). }$$

Para resolverlo usamos la regla de Cramer, $x = \Delta_x / \Delta$, $y = \Delta_y / \Delta$, $z = \Delta_z / \Delta$, con $\Delta = \det A = 3m$:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= m \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ m & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & -4 \end{vmatrix} \\ &= m(m + 12) - 3m - m = m(m + 8), \\ \Delta_y &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ m & m \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & m \end{vmatrix} \\ &= -6m - m(m - 15) + m = m(10 - m), \\ \Delta_z &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & m \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 2m + m - 9m = -6m. \end{aligned}$$

Así, para $m \neq 0$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{m+8}{3}, \frac{10-m}{3}, -2 \right).$$

Si $m = 0$, el determinante se anula y hay que estudiar los rangos por separado. El menor de A formado por las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) \geq 2$; como $\det A = 0$, el rango no es 3 y queda $\operatorname{rg}(A) = 2$.

En la ampliada, cuando $m = 0$, la tercera fila es tres veces la primera menos la segunda, también en el término independiente:

$$(5, -4, 0 \mid 0) = 3(2, -1, 1 \mid 0) - (1, 1, 3 \mid 0).$$

Luego $\text{rg}(A^*) = 2$. Comparamos rangos y número de incógnitas:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \implies \text{sistema compatible indeterminado (SCI)}.$$

No hay ningún valor de m para el que el sistema sea incompatible.

b) Solución para $m = 1$

Sustituimos $m = 1$ en la solución de Cramer:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1+8}{3}, \frac{10-1}{3}, -2 \right) = (3, 3, -2).$$

Comprobamos en las tres ecuaciones:

$$2(3) - 3 - 2 = 1, \quad 3 + 3 + 3(-2) = 0, \quad 5(3) - 4(3) + (-2) = 1.$$

Por tanto, la solución es $(3, 3, -2)$.

c) Soluciones en el caso compatible indeterminado

El sistema solo es compatible indeterminado para $m = 0$. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$. De las dos primeras ecuaciones:

$$2x - y + t = 0, \quad x + y + 3t = 0.$$

Sumándolas se obtiene $3x + 4t = 0$, de donde $x = -4t/3$. Al sustituir en la segunda ecuación:

$$y = -3t - x = -3t + \frac{4t}{3} = -\frac{5t}{3}.$$

Así, todas las soluciones son

$$(x, y, z) = \left(-\frac{4t}{3}, -\frac{5t}{3}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Rectas y plano

Escribimos las rectas en forma paramétrica. La recta r , definida por $x + y - 1 = 0$ y $2x - z - 1 = 0$, se obtiene tomando $x = t$:

$$r: x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La otra recta está dada por

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} = u,$$

así que en forma paramétrica es

$$s: x = 1 + u, \quad y = -u, \quad z = 2u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Posición relativa de r y s

Sus vectores directores son

$$\vec{d}_r = (1, -1, 2), \quad \vec{d}_s = (1, -1, 2).$$

Son paralelas o coincidentes. Para decidirlo, comparamos un punto de cada una: $P_r = (0, 1, -1)$ y $P_s = (1, 0, 0)$. El vector que los une es

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (1, -1, 1),$$

que no es múltiplo de $(1, -1, 2)$. Por tanto, las rectas no coinciden: son **paralelas distintas**.

b) Valor de m para que r esté contenida en el plano

El plano en forma general es

$$\pi: x + my + z - 2 = 0.$$

Para que r esté contenido, todos sus puntos deben satisfacer la ecuación. Sustituimos sus coordenadas paramétricas:

$$\begin{aligned} x + my + z - 2 &= t + m(1-t) + (2t-1) - 2 \\ &= (3-m)t + (m-3). \end{aligned}$$

Esta expresión tiene que ser cero para todo t . Por tanto, tanto el coeficiente de t como el término independiente deben anularse:

$$3 - m = 0, m - 3 = 0.$$

Ambas condiciones dan $m = 3$.

c) Intersecciones con los ejes y volumen cuando $m = 2$

Para $m = 2$, el plano general es

$$\pi: x + 2y + z - 2 = 0.$$

En el eje x , $y = z = 0$, por lo que $x = 2$ y $A = (2, 0, 0)$. En el eje y , $x = z = 0$, entonces $2y = 2$ y $B = (0, 1, 0)$. En el eje z , $x = y = 0$, así que $z = 2$ y $C = (0, 0, 2)$.

El volumen del tetraedro de vértices A, B, C, P , con $P = (2, 2, 2)$, es un sexto del valor absoluto del determinante de tres vectores con origen en A :

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} \right) \right|.$$

Calculamos

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{AP} = (0, 2, 2),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6} |8 + 4| = 2. \end{aligned}$$

Problema 3 · Dominio, monotonía, extremos, asíntotas y gráfica

La función del enunciado es

$$f(x) = x e^{1-x^2}.$$

a) Dominio, crecimiento, decrecimiento y extremos

La función está definida para todo número real: x es un polinomio y la exponencial e^{1-x^2} existe para cualquier exponente real. Por tanto, $D_f = \mathbb{R}$.

Derivamos usando la regla del producto y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} (-2x) \\ &= e^{1-x^2} (1 - 2x^2). \end{aligned}$$

La exponencial siempre es positiva, así que los puntos críticos salen de $1 - 2x^2 = 0$:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Probamos un valor de la derivada en cada intervalo:

Intervalo	Valor de prueba	$f'(x)$ en la prueba	Signo	Comportamiento
$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	-1	-1	-	Decrece
$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	0	$e > 0$	+	Crece
$(1/\sqrt{2}, \infty)$	1	-1	-	Decrece

En $x = -1/\sqrt{2}$ el signo pasa de - a +, por lo que hay un mínimo relativo. En $x = 1/\sqrt{2}$ pasa de + a -, por lo que hay un máximo relativo. Sus ordenadas son

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Así, el mínimo es $\left(-1/\sqrt{2}, -\sqrt{e/2}\right)$ y el máximo es $\left(1/\sqrt{2}, \sqrt{e/2}\right)$.

b) Asíntotas y gráfica

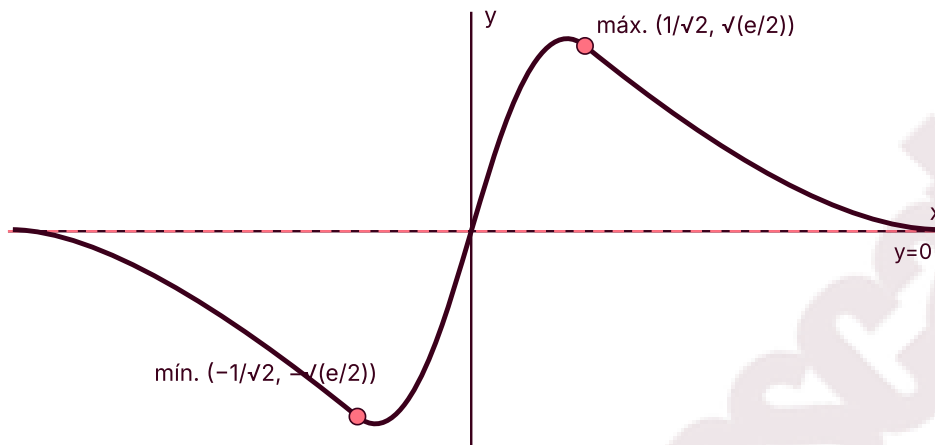
No hay asíntotas verticales: el dominio es todo $\mathbb{R}$, y la función no tiene puntos de discontinuidad. En los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x^2} = 0.$$

Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal tanto a la izquierda como a la derecha. No hay asíntota oblicua: la pendiente que tendría una recta oblicua es

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1-x^2} = 0,$$

que no es distinta de cero.



c) Integral

Usamos el cambio $u = 1 - x^2$, de modo que $du = -2x dx$ y $x dx = -du/2$:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x e^{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C}. \end{aligned}$$

Problema 4 · Rangos de matrices y sistema

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Rango de A según a

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & a^2 - 2 \end{vmatrix} \\ &= (-a^2 + 3a + 2) + 8 + (-3a^2 - 3a + 6) \\ &= -4a^2 + 16 \\ &= -4(a - 2)(a + 2). \end{aligned}$$

Si $a \neq \pm 2$, el determinante es distinto de cero, así que $\text{rg}(A) = 3$. Si $a = 2$ o $a = -2$, el determinante vale cero y el rango es menor que 3. Sin embargo, el menor formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3 siempre vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

En esos dos casos el rango es al menos 2 y, por tanto, exactamente 2:

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \neq \pm 2, \\ 2, & a = \pm 2. \end{cases}$$

b) Matriz C tal que $AC = 16I$ cuando $a = 0$

Sustituimos $a = 0$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \det A_0 = -4(0-2)(0+2) = 16.$$

La fórmula de la inversa es $A_0^{-1} = \operatorname{adj}(A_0) / \det A_0$. Al calcular los cofactores se obtiene la matriz

$$\operatorname{Cof}(A_0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La adjunta es su traspuesta. Por ello, basta tomar $C = \operatorname{adj}(A_0)$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos la multiplicación:

$$\begin{aligned} A_0 C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+8+6 & -12+0+12 & 2-8+6 \\ -2+0+2 & 12+0+4 & -2+0+2 \\ 2-8+6 & -12+0+12 & 2+8+6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I. \end{aligned}$$

Así, una matriz válida es la C indicada.

c) Rango de B y discusión del sistema

La matriz B es el producto de una columna no nula por una fila no nula:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, sus dos filas son proporcionales y $\operatorname{rg}(B) = 1$. Al multiplicar por $(x, y, z)^T$:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (x + 2y + 3z).$$

El sistema del enunciado pide que esto sea $(-1, 2)^T$, de modo que equivale a la ecuación

$$x + 2y + 3z = 1.$$

La matriz ampliada también tiene rango 1, porque la segunda fila es -2 veces la primera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Así,

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(B^*) = 1 < 3,$$

y, por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones pueden escribirse como

$$(x, y, z) = (1 - 2s - 3t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Problema 5 · Puntos, plano y rectas

Los puntos son $P = (1, 1, 0)$, $Q = (2, -1, 1)$ y $R = (a, 3, -1)$.

a) Plano por P, Q, R para $a = 1$ y distancia al origen

Para $a = 1$, $R = (1, 3, -1)$. Dos vectores del plano son

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -2, 1), \quad \overrightarrow{PR} = R - P = (0, 2, -1).$$

Su producto vectorial da un vector normal:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 2).$$

La ecuación del plano por P , en forma general, es

$$0(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 0) = 0,$$

es decir,

$$\pi : y + 2z - 1 = 0.$$

Para un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia del origen es

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = -1$:

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

b) Recta por R paralela a la recta s por P, Q

La recta por P y Q tiene vector director $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1)$, y en forma paramétrica es

$$s : x = 1 + t, y = 1 - 2t, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

Para $a = 1$, la recta pedida pasa por $R = (1, 3, -1)$ y tiene el mismo vector director:

$$\boxed{r : x = 1 + t, y = 3 - 2t, z = -1 + t, t \in \mathbb{R}}.$$

c) Valores de a para que los puntos estén alineados

Tres puntos están alineados si R se puede escribir como $P + t\overrightarrow{PQ}$:

$$(a, 3, -1) = (1, 1, 0) + t(1, -2, 1).$$

Comparamos coordenadas. La segunda da $3 = 1 - 2t$, así que $t = -1$. La primera da $a = 1 + t = 0$. La tercera se verifica porque $0 + t = -1$. Luego

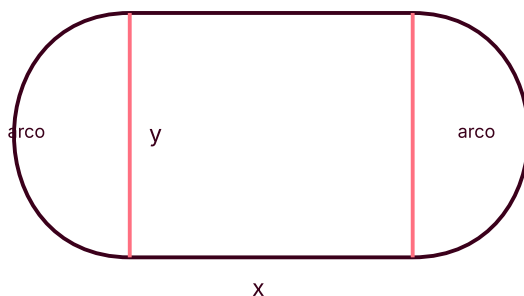
$$\boxed{a = 0}.$$

La recta que contiene a los tres puntos, para ese valor de a , es

$$\boxed{x = 1 + t, y = 1 - 2t, z = t, t \in \mathbb{R}}.$$

Problema 6 · Campo con semicircunferencias

Sea x la longitud horizontal del rectángulo central y y su altura, ambas medidas en metros. Cada semicircunferencia tiene diámetro y , así que las dos juntas forman una circunferencia de radio $y/2$. El dibujo representa también los dos segmentos verticales interiores, que cuentan como rayas pintadas.



a) Longitud total de las rayas

La superficie es la suma del rectángulo y de las dos semicircunferencias, que forman un círculo de radio $y/2$:

$$xy + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi.$$

Como una altura debe ser positiva, $y > 0$. Al despejar x , obtenemos $x = \frac{4+\pi}{y} - \frac{\pi y}{4}$. Las rayas son: dos lados horizontales de longitud x , dos divisiones verticales interiores de longitud y , y los dos arcos semicirculares, cuya longitud conjunta es la circunferencia πy . Así,

$$L = 2x + 2y + \pi y = 2x + (\pi + 2)y.$$

Sustituyendo x para expresar todo en función de y :

$$L(y) = \frac{2(4+\pi)}{y} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)y.$$

b) Dimensiones que minimizan la pintura

El campo debe tener $x \geq 0$, además de $y > 0$. Derivamos la longitud:

$$L'(y) = -\frac{2(4+\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Buscamos el punto crítico:

$$L'(y) = 0 \implies \frac{2(4+\pi)}{y^2} = 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{4+\pi}{2} \implies y^2 = 4.$$

Como $y > 0$, queda $y = 2$. Comprobamos que es mínimo: se tiene $L''(y) = \frac{4(4+\pi)}{y^3} > 0$ para todo $y > 0$. Calculamos x con la condición del área:

$$x = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi \cdot 2}{4} = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2.$$

Este valor cumple $x \geq 0$. Por tanto, las dimensiones que minimizan la longitud pintada son

$$x = 2 \text{ m}, y = 2 \text{ m},$$

y la longitud mínima es

$$L_{\min} = 2(2) + (\pi + 2)(2) = 8 + 2\pi \text{ m}.$$