

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible. (5 puntos)
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$. (3 puntos)
- c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$. (4 puntos)

Solución:

En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3.

A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a = a^2 - 3a + 2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \text{Por Ruffini,} \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \\ 2 & & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array} \quad \text{Soluciones: } a=1 \text{ y } a=2$$

Entonces,

para $a \neq 1, 2$, $|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y, como el máximo rango de A' es 3, $\text{ran}(A') = 3$, por lo que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

para $a = 1$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Como $F_3 = F_1$, en el estudio del rango de A' podemos eliminar la fila 3.

Quedaría $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A (como A es 2×3 , el máximo rango de A será 2),

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' también sería 2 (A' es 2×4) $\rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Por tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado.}$

para $a = 2$, $|A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$

La matriz ampliada del sistema queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Calculemos el rango de A, sabemos que $|A| = 0$ (el máximo rango de A será 2),

$$\left. \begin{array}{l} |I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como el máximo rango de A' también sería 2 (A' es 2×4) $\rightarrow \text{ran}(A') = 2$

Calculemos el rango de A' , añadiendo al menor anterior de orden 2 no nulo la 3ª fila y la 4ª columna de A' ,

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por tanto, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A') \rightarrow$ **Sistema Incompatible.**

Respondamos a las preguntas,

a) **El sistema es compatible para $a \neq 2$.**

(para $a \neq 1, 2$ es compatible determinado y para $a = 1$ es compatible indeterminado)

b) Soluciones para $a = 1$

Según lo estudiado inicialmente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales z e y . Es decir,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) Soluciones para $a = 0$

Si $a = 0$, $a \neq 1, 2$, el sistema es compatible determinado.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \quad |A| = a^2 - 3a + 2 \Big|_{a=0} = 2. \quad \text{Por Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es: $x = y = z = 1/2$.

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$, la recta $s: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 1, 1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La recta que pasa por A , corta a la recta s y es paralela al plano π . (4 puntos)
- El plano que pasa por A , es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s . (3 puntos)
- Discute si el punto $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$. (3 puntos)

Solución:

a) ¿Recta r ? / $A \in r$, $r \cap s \neq \emptyset$ y $r \parallel \pi$

Como $r \parallel \pi \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ ($\vec{v}_r \equiv$ vector director de r , $\vec{n}_\pi \equiv$ vector perpendicular al plano π)
 $\vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$

Como r corta a s , obtengamos un punto cualquiera de la recta s :

$$s: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow P_s(2\lambda, \lambda, 0)$$

$$A \in r \text{ y } P_s \in r \rightarrow \overrightarrow{AP_s} \text{ es } \vec{v}_r$$

$$\overrightarrow{AP_s} = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) = \vec{v}_r$$

$$\text{como } \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0$$

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

Para $\lambda = 1$, $P_s(2, 1, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$. Por tanto, la ecuación de la recta pedida será:

Ecuación continua: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) ¿Plano σ ? / $A \in \sigma$, $\sigma \perp \pi$ y $\sigma \parallel s$

Para obtener la ecuación del plano σ necesitamos un punto y dos vectores directores de σ .

como $A \in \sigma \rightarrow P_\sigma = A = (1, 1, 1)$

$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{u}_\sigma = \vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$

$\sigma \parallel s \rightarrow \vec{v}_\sigma = \vec{v}_s = (2, 1, 0)^*$

(* a partir de la ecuación paramétrica de la recta s obtenida en el apartado (a))

Ecuación del plano σ ,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{desarrollando por la 1ª fila})$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)(-2) + (z-1)(1+2) = 0$$

$$-x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0$$

$$-x + 2y + 3z - 4 = 0 \rightarrow x - 2y - 3z + 4 = 0$$

Solución: plano $\sigma: x - 2y - 3z + 4 = 0$

c) ¿recta t ? / $(5, 3, 1) \in t$ y $t \parallel s$.

$$\text{recta } t: \begin{cases} \text{punto } (5, 3, 1) \\ \vec{v}_t \left(\text{como } t \parallel s \rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_s \right) \rightarrow \vec{v}_t = (2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Por tanto, } t: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Veamos si el punto $(3, 2, 1) \in t$

$$\begin{cases} 3 = 5 + 2\lambda \\ 2 = 3 + \lambda \\ 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \quad \text{Solución } \lambda = -1$$

Por tanto $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$.

Tu Profeta al Rescate

PROBLEMA A.3. Consideramos la función $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x \cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$. (2 puntos)
- b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos)
- c) $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$ (4 puntos)

Solución:

a) Para $x = 1$, $f(1) = 22$.

$$22 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1)$$

$$22 = a + b + c \cdot (-1)$$

$$22 = a + b - c$$

Solución: la relación entre los coeficientes es $a + b - c = 22$.

b) P es el punto de $y = f(x)$ cuando $x = 1$; según el apartado anterior $P(1, 22)$.

Para que la tangente a $y = f(x)$ en P sea horizontal, debe ser $y'_{x=1} = 0$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \cos(\pi x) + cx(-\sin(\pi x)) \cdot \pi = 3ax^2 + 2bx + c \cos(\pi x) - \pi c x \sin(\pi x)$$

$$y'_{x=1} = 3a + 2b + c \cos(\pi) - \pi c \sin(\pi) = 3a + 2b - c$$

Solución: la relación entre los coeficientes es $3a + 2b - c = 0$.

c) $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$. Calculemos $\int x \cos(\pi x) dx$, la resolvemos por partes,

$$\int x \cos(\pi x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x) dx \rightarrow v = \int \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{array} \right\} =$$

$$= x \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) dx = \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int \sin(\pi x) dx =$$

$$= \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} (-\cos(\pi x)) \right] = \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx &= \left[\frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 = \left(\frac{1 \cdot \sin(\pi \cdot 1)}{\pi} + \frac{\cos(\pi \cdot 1)}{\pi^2} \right) - \\ &- \left(\frac{0 \cdot \sin(\pi \cdot 0)}{\pi} + \frac{\cos(\pi \cdot 0)}{\pi^2} \right) = \left(\frac{1 \cdot 0}{\pi} + \frac{-1}{\pi^2} \right) - \left(0 + \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{-1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026 \end{aligned}$$

Solución: $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$

PROBLEMA B.1. Resolver los siguientes apartados, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. (4 puntos)

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}, \text{ cumpla que } B^2 = B \text{ pero } AB \neq A \text{ y } BA \neq B \quad (2 \text{ puntos})$$

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, Obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ puntos})$$

Solución:

a) A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, ¿ $A^2 = A$? y ¿ $B^2 = B$?

Consideramos $AB = A$ (1) y $BA = B$ (2)

$$A^2 = A A = \{\text{por (1)}\} = (AB)A = \{\text{propiedad asociativa}\} = A(BA) = \{\text{por (2)}\} = AB = \{\text{por (1)}\} = A$$

Por tanto, $A^2 = A$

$$B^2 = B B = \{\text{por (2)}\} = (BA)B = \{\text{propiedad asociativa}\} = B(AB) = \{\text{por (1)}\} = BA = \{\text{por (2)}\} = B$$

Por tanto, $B^2 = B$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ¿ $a, b \in \mathbb{R} / B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla $B^2 = B, AB \neq A$ y $BA \neq B$?

$$B^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B^2 = B \rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$b^2 = b \rightarrow b^2 - b = 0 \rightarrow b(b-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b-1 = 0 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Como, además, } a+b=1 \rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{y } b=1 \\ 0 & \\ a=1 & \text{y } b=0 \end{cases} \quad (m)$$

Como $AB \neq A$,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow a \neq 1$$

Como $BA \neq B$,

$$BA = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \rightarrow b \neq 0$$

De las dos soluciones obtenidas en (m), la que cumple que $a \neq 1$ y $b \neq 0$ es $a = 0$ y $b = 1$.

Solución: los valores de los parámetros buscados son $a = 0$ y $b = 1$.

$$c) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

Calculemos:

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{El factor 2 que se repite en} \\ \text{la 1ª columna sale fuera del} \\ \text{determinante} \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Como la 1ª columna} \\ \text{es suma de dos, el} \\ \text{determinante se} \\ \text{calcula como suma} \\ \text{de dos determi-} \\ \text{nantes} \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{En el último} \\ \text{determinante} \\ C_1 = C_2 + C_3, \\ \text{por tanto es} \\ \text{nulo} \end{matrix} = 3 + 0 = 3$$

$$\text{Por tanto, } \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

PROBLEMA B.2. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 puntos)
- La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ (4 puntos)
- La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior. (2 puntos)

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r .

Debemos resolver el sistema que determina a r .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, el sistema a resolver es $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y = 8 + z \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8+z & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{12-8-z}{3} = \frac{4-z}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8+z \end{vmatrix}}{3} = \frac{8+z-3}{3} = \frac{5+z}{3} \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas "complicadas"}$$

Escogemos otro menor no nulo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el sistema a resolver es $\begin{cases} y = 3 - x \\ 4y - z = 8 - x \end{cases}$

Sustituyendo el valor de y de la 1ª ecuación en la 2ª,

$$4(3-x) - z = 8 - x, \text{ hay que despejar } z, 12 - 4x - z = 8 - x; z = 4 - 3x$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son:
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) ¿Plano π ? $\pi // r$ y los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0) \in \pi$

Para el plano π necesitamos un punto y dos vectores directores,

Punto de π $(5,0,1)$

Como $\pi // r \rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_r = (1, -1, -3)$, de las ecuaciones paramétricas de r obtenidas en (a).

Con los dos puntos del plano π , $\vec{v}_2 = (5,0,1) - (4,1,0) = (1, -1, 1)$

Ecuación del plano π ,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-0 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{desarrollando por la 1ª fila})$$

$$(x-5) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)(-1-3) - y(1+3) + (z-1)(-1+1) = 0$$

$$-4(x-5) - 4y = 0 \rightarrow -4x + 20 - 4y = 0 \rightarrow x + y - 5 = 0$$

Solución: $\pi: x + y - 5 = 0$

c) ¿ $d(r, \pi)$?

Como $r \parallel \pi$ (según el apartado (b)), $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$

Pr $(0, 3, 4)$ (según las ecuaciones paramétricas de la recta r obtenidas en (a))

$$d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Solución: $d(r, \pi) = \sqrt{2}$ u.l.

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:

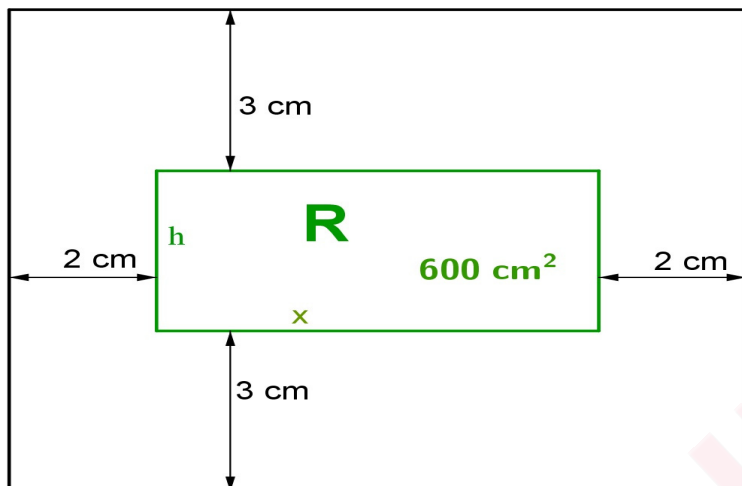
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R . (3 puntos)
- El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima. (5 puntos)
- Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima. (3 puntos)

Solución:

La representación gráfica del ejercicio es:



- a) Área de la cartulina en función de x (base de R).

$$A_R = 600 \text{ cm}^2 \rightarrow x \cdot h = 600 \rightarrow h = \frac{600}{x} \text{ (como } x \text{ es la longitud de la base, } x > 0 \text{)}$$

Entonces, las medidas de la cartulina son: base = $x + 4$ y altura = $\frac{600}{x} + 6$

El área de la cartulina será: $(x + 4) \left(\frac{600}{x} + 6 \right) = 600 + 6x + \frac{2400}{x} + 24 = 624 + 6x + \frac{2400}{x}$

Solución: $A_{\text{cartulina}} = 624 + 6x + \frac{2400}{x}, \quad x > 0$

- b) ¿ x ? / $A_{\text{cartulina}}$ sea mínima.

Por el apartado (a) sabemos que $A_{\text{cartulina}} = 624 + 6x + \frac{2400}{x}, \quad x > 0$

Obtengamos el mínimo de esta función,

$$A'_{\text{cartulina}} = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

$$A'_{\text{cartulina}} = 0 \rightarrow 6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \rightarrow 6x^2 - 2400 = 0 \rightarrow 6x^2 = 2400 \rightarrow x^2 = 400$$

$$x = \pm \sqrt{400} = \pm 20$$

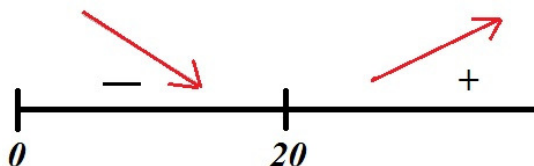
Como $x > 0$, entonces $x = 20$

Para determinar si para este valor de x el área es mínima, estudiemos la monotonía de $A_{\text{cartulina}}$

Hay que estudiar el signo de $A'_{\text{cartulina}}$ en los intervalos $(0, 20)$ y $(20, +\infty)$

x	A'_c
1	$6 - \frac{2400}{l^2} = -2394 < 0$
21	$6 - \frac{2400}{2l^2} = 0.55.. > 0$

Por tanto:



Luego, en $x = 20$ se alcanza el mínimo relativo que, además, es el mínimo absoluto ya que la función A_c es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Solución: el área de la cartulina es mínima para $x = 20$ cm.

c) Dimensiones de dicha cartulina.

Para $x = 20$, (según calculamos en el apartado (a)) las dimensiones de la cartulina son:

$$\text{base} = 20 + 4 = 24 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \text{altura} = \frac{600}{20} + 6 = 36 \text{ cm}$$

Solución: las dimensiones de la cartulina de área mínima pedida son 24 cm de ancho y 36 cm de alto.

Tu Profe al Rescate