

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

Opción A

Problema 1 · Operaciones con matrices

a) Si llamamos $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$, las ecuaciones son $X + Y = M$ y $2X - Y = N$. Al sumarlas, eliminamos Y :

$$3X = M + N = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De $X + Y = M$ obtenemos

$$Y = M - X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Para invertir $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ calculamos primero su determinante:

$$\det A = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2 \neq 0.$$

Por tanto, existe la inversa. Para una matriz 2×2 , usamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

c) De $XA = C$, con $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, multiplicamos por A^{-1} a la derecha:

$$X = CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)}.$$

El denominador se anula en $x = 1$ y $x = 3$, así que $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Para cortar el eje X anulamos el numerador: $x = 2$, que sí pertenece al dominio. Para el eje Y , $f(0) = -4/3$. Los cortes son $(2, 0)$ y $(0, -4/3)$.

En $x = 1$ y $x = 3$ el numerador no se anula, por lo que hay asíntotas verticales. Los signos de los límites laterales son

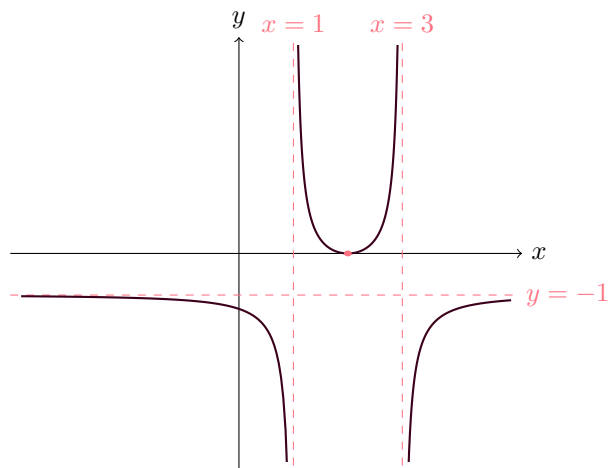
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

Como numerador y denominador tienen el mismo grado, el cociente de sus coeficientes principales da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$. La asíntota horizontal es $y = -1$.

Para estudiar la monotonía derivamos mediante la regla del cociente. También se puede escribir $f(x) = -1 - \frac{1}{(x-2)^2 - 1}$, de donde

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{((x-2)^2 - 1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio, así que el signo depende de $x - 2$. Por ello f decrece en $(-\infty, 1)$ y $(1, 2)$, y crece en $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$. El único punto crítico es $x = 2$; allí la derivada cambia de negativa a positiva y $f(2) = 0$, de modo que hay un mínimo local en $(2, 0)$ y no hay máximos locales.



Mínimo local $(2,0)$; asíntotas $x=1$, $x=3$, $y=-1$.

Problema 3 · Extracción de caramelos

Hay 45 caramelos en total y se extraen dos sin reemplazamiento. El número de parejas posibles es $\binom{45}{2} = 990$.

a) Para que los dos sean de naranja, elegimos dos de los 25:

$$P(\text{dos naranjas}) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{45}{2}} = \frac{300}{990} = \frac{10}{33}.$$

b) Las parejas del mismo sabor pueden ser de naranja, limón o café. Sumamos esos casos incompatibles:

$$P(\text{mismo sabor}) = \frac{\binom{25}{2} + \binom{12}{2} + \binom{8}{2}}{\binom{45}{2}} = \frac{300 + 66 + 28}{990} = \frac{197}{495}.$$

c) Que ninguno sea de café significa que ambos se eligen entre los 37 caramelos de naranja o limón:

$$P(\text{ninguno de café}) = \frac{\binom{37}{2}}{\binom{45}{2}} = \frac{666}{990} = \frac{37}{55}.$$

$$P(\text{dos naranjas}) = \frac{10}{33}, \quad P(\text{mismo sabor}) = \frac{197}{495}, \quad P(\text{ninguno de café}) = \frac{37}{55}.$$

Opción B

Problema 1 · Sistema de compras

Sean x , y y z las cantidades de unidades de memoria, lectores electrónicos y tabletas gráficas. Los datos del enunciado dan

$$x + y + z = 9, \quad 100x + 120y + 150z = 1160, \quad z = y + 1.$$

Usamos primero la relación entre tabletas y lectores. De $z = y + 1$ y del total, $x + 2y + 1 = 9$, luego $x = 8 - 2y$. Al sustituir en el coste:

$$100(8 - 2y) + 120y + 150(y + 1) = 1160 \implies 950 + 70y = 1160 \implies y = 3.$$

Así, $x = 2$ y $z = 4$. Las cantidades son números enteros no negativos, como requiere el contexto.

2 unidades de memoria, 3 lectores electrónicos y 4 tabletas gráficas.

Problema 2 · Función definida a trozos

La función está definida en $[-2, 5]$ y viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x < 0, \\ x^2 - 2x + 2, & 0 \leq x < 3, \\ 3x - 1, & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

a) En cada tramo la expresión es polinómica y, por tanto, continua. Solo hay que comprobar los puntos de unión. En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

así que es continua. En $x = 3$,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5, \quad f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8.$$

Como los valores laterales no coinciden, hay una discontinuidad de salto en $x = 3$. En los extremos -2 y 5 se considera la continuidad relativa al intervalo.

b) En $[-2, 5/2]$ solo intervienen los dos primeros tramos. En el primero, $f(x) = x + 2$ crece desde $f(-2) = 0$ hasta aproximarse a 2. En el segundo, $f(x) = (x - 1)^2 + 1$, cuyo mínimo es 1 en $x = 1$; en el extremo $x = 5/2$ vale $13/4$. Al comparar estos valores:

$$\min_{[-2, 5/2]} f = 0 \text{ en } x = -2, \quad \max_{[-2, 5/2]} f = \frac{13}{4} \text{ en } x = \frac{5}{2}.$$

c) Entre 1 y 2 se utiliza la expresión $x^2 - 2x + 2$. Una primitiva es $F(x) = x^3/3 - x^2 + 2x$:

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{En } [-2, 5/2]: \min f = 0, \max f = \frac{13}{4}; \quad \int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3}.$$

Problema 3 · Probabilidad condicionada

Se conocen $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ y $P(A | B) = 0,2$. De la definición de probabilidad condicionada,

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

Además, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,22$.

a) Usamos el suceso complementario:

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B}) = 1 - 0,22 = 0,78.$$

b) La probabilidad de no estar en B sabiendo que se está en A es

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,08}{0,3} = \frac{4}{15}.$$

c) La probabilidad de no estar en ninguno de los sucesos es

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0,3 + 0,4 - 0,08) = 0,38.$$

d) Para que fueran independientes se tendría que cumplir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Sin embargo, $0,08 \neq 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$, por lo que no son independientes.

$P(\bar{A} \cup B) = 0,78, \quad P(B A) = \frac{4}{15}, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,38; \quad A, B \text{ no son independientes.}$
--