

Modelo 6 de 2008

Se emplean la regla del producto, cambios de variable y determinantes según las preguntas.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R}$. Derivando $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$:

$$f'(x) = e^x(3 - x - 2x^2) = e^x(1 + x)(3 - 2x).$$

Como $e^x > 0$, la función decrece en $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, 3/2)$ y decrece en $(3/2, \infty)$. Por tanto,

$$\boxed{\text{mínimo relativo } (-1, -5/e), \quad \text{máximo relativo } (3/2, 0)}.$$

Opción A - Ejercicio 2

En $(0, \pi/2)$ se tiene $\cos x > 0$. Con el cambio $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = - \int t^{-3} \, dt = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

La condición $F(\pi/3) = 1$ da $2 + C = 1$, luego

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} - 1}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Al pasar los términos con m al lado izquierdo, la matriz de coeficientes es

$$M_m = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}, \quad \det M_m = -(m-1)(m^2 - 7m + 9).$$

El sistema homogéneo tiene más de una solución exactamente cuando el determinante se anula:

$$m = 1, \quad m = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}, \quad m = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}.$$

Para $m = 0$, el determinante vale $9 \neq 0$, así que la única solución es $(0, 0, 0)$. Para $m = 1$, las dos primeras ecuaciones coinciden y la tercera aporta una ecuación independiente; queda

$$x + y + z = 0, \quad x + 2y + 3z = 0,$$

de donde

$$(x, y, z) = t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Parametrizamos r como $(t, mt, mt - 2)$, con vector director $(1, m, m)$. La recta s tiene director $(4, 1, 2)$. Son perpendiculares cuando

$$(1, m, m) \cdot (4, 1, 2) = 4 + 3m = 0,$$

por lo que $m = -4/3$. Para ser paralelas, los vectores deberían ser proporcionales; las dos últimas componentes exigirían simultáneamente $m = 1/4$ y $m = 1/2$, imposible. No existe valor de m para el que sean paralelas.

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $x = 0$, el denominador tiende a 0, mientras que el numerador tiende a 2; los límites laterales son $+\infty$ y $-\infty$, así que $x = 0$ es asíntota vertical. Dividiendo numerador y denominador por e^x :

$$f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow +\infty,$$

y, cuando $x \rightarrow -\infty$, la expresión original tiende a -1 . Las asíntotas horizontales son

$$y = 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty, \quad y = -1 \text{ si } x \rightarrow -\infty.$$

Opción B - Ejercicio 2

Factorizamos

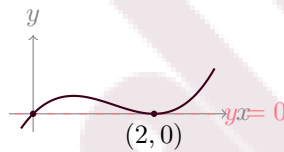
$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x = \frac{x(x-2)^2}{4}.$$

La derivada $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$ se anula en $x = 2/3$ y $x = 2$. La gráfica crece hasta $2/3$, decrece hasta 2 y luego vuelve a crecer. En $x = 2$, $g(2) = g'(2) = 0$, así que la tangente es

$$y = 0.$$

La función es no negativa en $[0, 2]$; el área acotada por la gráfica y el eje x es

$$\int_0^2 g(x) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$



Opción B - Ejercicio 3

El determinante es

$$\det A = 4(k^2 - 3),$$

por lo que $\text{rg}(A) = 3$ si $k \neq \pm\sqrt{3}$. Para $k = \pm\sqrt{3}$, el menor $1 - 3k$ es distinto de cero, de modo que el rango es 2. Para $k = 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Tomamos $\overrightarrow{BC} = (3, 1, -1)$ y $\overrightarrow{BD} = (4, 0, -2)$. Su producto vectorial es proporcional a $(1, -1, 2)$, normal al plano BCD . Al pasar por $B = (-1, 1, 2)$:

$$\pi : x - y + 2z - 2 = 0.$$

La reflexión de $A = (2, 0, 1)$ respecto de $ax + by + cz + d = 0$ se obtiene con

$$A' = A - 2 \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c).$$

Aquí el numerador es 2 y el denominador 6, así que

$$A' = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$