

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria de 2025

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Álgebra

1.1 a) Discusión del sistema según k

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{array} \right).$$

Calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes. Si es distinto de cero, el sistema tiene solución única; si se anula, estudiaremos los rangos:

$$\begin{aligned} \det A_k &= k^2(k+1) - k + ((k+1)^2 - 1) \\ &= k(k+1)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, el determinante se anula exactamente para $k = 0$ y $k = -1$.

Si $k \neq 0, -1$, se tiene $\text{rang}(A_k) = 3$, igual al número de incógnitas. Como A_k es invertible, también $\text{rang}(A_k^*) = 3$; por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado. Para obtener la solución, usamos la regla de Cramer. Denotando por $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ los determinantes que se obtienen al sustituir, respectivamente, cada columna de A_k por el término independiente:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \\ 2k & k+1 & 0 \end{vmatrix} = -k(k+1), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ k+1 & k & -k \\ 1 & 2k & 0 \end{vmatrix} = k(2k^2 + 2k + 1), \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & k \\ 1 & k+1 & 2k \end{vmatrix} = -k(k^2 + k + 1). \end{aligned}$$

Así,

$$x = \frac{\Delta_x}{\det A_k} = -\frac{1}{k+1}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\det A_k} = \frac{2k^2 + 2k + 1}{(k+1)^2}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\det A_k} = -\frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2}.$$

Para los dos valores que anulan el determinante, comparamos los rangos. Si $k = 0$, las filas segunda y tercera de la matriz ampliada coinciden, mientras que el menor formado por las dos primeras filas y columnas de A_0 vale -1 . Por tanto, $\text{rang}(A_0) = \text{rang}(A_0^*) = 2 < 3$; por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. Si $k = -1$, el mismo menor de la matriz de coeficientes vale -1 , de modo que su rango es 2; en cambio, el menor de la ampliada formado por las columnas de x, y y los términos independientes vale

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por ello, $\text{rang}(A_{-1}^*) = 3 > \text{rang}(A_{-1})$, y el sistema es incompatible. **Conclusión.** Para $k \neq 0, -1$ el sistema es SCD; para $k = 0$ es SCI; y para $k = -1$ es SI.

1.1 b) Resolución para $k = 0$

Al sustituir $k = 0$ en el sistema, las ecuaciones quedan

$$y + z = 0, \quad x + y = 0, \quad x + y = 0.$$

La primera y la segunda ecuación son independientes, mientras que la tercera repite la segunda. Tomando $y = t$ como parámetro, se obtiene $x = -t$ y $z = -t$; equivalentemente, podemos cambiar el parámetro de signo:

$$(x, y, z) = \lambda(1, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $k = 0$, las soluciones son $(x, y, z) = (\lambda, -\lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.2 a) Matrices simétricas B

Calculamos primero la matriz que aparece en la igualdad:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A + A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toda matriz simétrica de orden 2 tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar por separado los dos miembros de $BA = (A + A^2)B$, resulta

$$BA = \begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix}, \quad (A + A^2)B = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes:

$$a = -b, \quad c = -a, \quad b = c.$$

Estas condiciones son compatibles y dejan un parámetro libre: si $b = t$, entonces $a = -t$ y $c = t$. **Conclusión.**

Las matrices buscadas son $B = t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbb{R}$.

1.2 b) Cálculo de A_{2025}

La sucesión de matrices se define mediante $A_{n+1} = A_n^2 + A_n$. Calculamos las primeras matrices:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_1^2 + A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, el polinomio característico de A es $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, por lo que, por Cayley-Hamilton,

$$A^2 + 2A + 2I = 0.$$

Como $A_2 = -A - 2I$, la siguiente matriz es

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2^2 + A_2 \\ &= (-A - 2I)^2 + (-A - 2I) \\ &= A^2 + 3A + 2I = A. \end{aligned}$$

La recurrencia repite, por tanto, el ciclo $A_1, A_2, A_1, A_2, \dots$, de periodo 2. Como 2025 es impar, $A_{2025} = A_1$.

Conclusión. $A_{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2 - Optimización

Sean $x = AB = DE$ y $y = BD = EA$ los lados del rectángulo. El triángulo BCD es equilátero de lado $BD = y$, así que sus otros dos lados también miden y . El perímetro exterior del pentágono está formado por AB, BC, CD, DE y EA (el lado BD queda en el interior):

$$2x + 3y = 120 \implies x = 60 - \frac{3}{2}y.$$

La parcela está formada por el rectángulo y el triángulo equilátero. Usando $A_{\text{rect}} = xy$ y $A_{\text{equil}} = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$, el área total, escrita en función de y , es

$$S(y) = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = 60y - \frac{6 - \sqrt{3}}{4}y^2.$$

Las longitudes deben ser positivas: $y > 0$ y $x > 0$, de modo que $0 < y < 40$. Para maximizar el área buscamos los puntos críticos de S en ese dominio:

$$S'(y) = 60 - \frac{6 - \sqrt{3}}{2}y = 0 \implies y = \frac{120}{6 - \sqrt{3}} = \frac{40(6 + \sqrt{3})}{11}.$$

Este valor pertenece a $(0, 40)$. Además,

$$S''(y) = -\frac{6 - \sqrt{3}}{2} < 0,$$

por lo que el punto crítico es un máximo. La otra dimensión vale

$$x = 60 - \frac{3}{2}y = \frac{60(5 - \sqrt{3})}{11}.$$

Conclusión. Para obtener el área máxima, debe situarse B a $\frac{60(5 - \sqrt{3})}{11}$ m de A y E a $\frac{40(6 + \sqrt{3})}{11}$ m de A .

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

3.1 a) No coplanaridad y volumen

Tomamos A como vértice común y calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 1, -1 - 1, 0 - 2) = (1, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2 - 1, 0 - 1, 3 - 2) = (-3, -1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (2 - 1, -3 - 1, -1 - 2) = (1, -4, -3).$$

Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto de tres vectores que parten de uno de ellos es cero. Aquí,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 5, -7), \quad (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -4 - 20 + 21 = -3 \neq 0.$$

Por tanto, los puntos no son coplanarios. El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto de ese producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. Los cuatro puntos no son coplanarios y el volumen del tetraedro es $\frac{1}{2}$ unidades cúbicas.

3.1 b) Área de ABC y altura desde D

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

El volumen de una pirámide también es $V = \frac{1}{3} \text{Área}(ABC) h$, donde h es la altura desde D a la cara ABC . Despejando,

$$h = \frac{3V}{\text{Área}(ABC)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Conclusión. El área de ABC es $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ y la altura desde D mide $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3.1 c) Distancia entre r y BD

Para aplicar la fórmula de distancia entre rectas alabeadas, primero expresamos ambas en paramétricas. En r tomamos como parámetro común t el valor de las tres fracciones:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t - 1, \\ z = -t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto de r es $P = (1, -1, 0)$ y su vector director es $\vec{u} = (2, 1, -1)$. Para la recta BD :

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (2 - 2, -3 - (-1), -1 - 0) = (0, -2, -1),$$

por lo que pasa por $B = (2, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (0, -2, -1)$. Los directores no son proporcionales; calculamos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, 2, -4) \neq \vec{0}.$$

La distancia entre dos rectas alabeadas se obtiene con

$$d = \frac{|(\vec{Q} - \vec{P}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

donde P y Q son puntos de las rectas y $\vec{u}, \vec{v}$ sus vectores directores. Aquí, con $Q = B$, se tiene $\vec{Q} - \vec{P} = (1, 0, 0)$; además, el producto mixto vale $-3 \neq 0$, lo que confirma que las rectas no son coplanarias. Por tanto,

$$d(r, BD) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (-3, 2, -4)|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29}.$$

Conclusión. La distancia entre r y BD es $\frac{3}{\sqrt{29}}$ unidades.

3.2 a) Plano paralelo a OZ que pasa por A y B

Un plano que contiene A y B contiene el vector

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 0, 0 - 0, 1 - 1) = (1, 0, 0).$$

Al ser paralelo al eje OZ , también contiene un vector director de ese eje, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Un vector normal se obtiene mediante el producto vectorial de estos dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{k} = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0).$$

La ecuación general del plano es $-y + D = 0$. Como debe pasar por $A(0, 0, 1)$, resulta $D = 0$. **Conclusión.** El plano pedido es $y = 0$.

3.2 b) Recta perpendicular a $z = 1$ a distancia uno de A y de B

El vector normal del plano $z = 1$ es $(0, 0, 1)$; por tanto, una recta perpendicular a ese plano debe ser vertical. Si su punto de apoyo en el plano horizontal tiene coordenadas (x_0, y_0) , la distancia desde un punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ a esa recta es

$$d(P, \ell) = \sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2};$$

la coordenada z_P no influye porque la recta recorre todas las alturas. Imponemos que las distancias de $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 0, 1)$ a la recta sean ambas 1:

$$x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1.$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene $x_0 = \frac{1}{2}$; sustituyendo, $y_0^2 = \frac{3}{4}$, de donde $y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Basta dar una de las dos rectas. Elegimos el signo positivo y un punto con coordenada $z = 0$:

$$\ell : \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector director $(0, 0, 1)$ es normal al plano, y las distancias pedidas son

$$d(A, \ell) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad d(B, \ell) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Conclusión. Una recta que cumple las condiciones es $\ell : (x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) + t(0, 0, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Pregunta 4 - Probabilidad

4.1 a) Probabilidad de una masa entre 60 y 80 kg

Sea X la masa, con $X \sim N(\mu, \sigma)$, $\mu = 75,67$ kg y $\sigma = 11,05$ kg. Para utilizar la tabla de la normal tipificada, transformamos cada valor mediante

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

Así,

$$z_{60} = \frac{60 - 75,67}{11,05} \approx -1,42, \quad z_{80} = \frac{80 - 75,67}{11,05} \approx 0,39.$$

Si $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, entonces

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 80) &= P(-1,42 \leq Z \leq 0,39) \\ &= \Phi(0,39) - \Phi(-1,42) \\ &= 0,6517 - 0,0778 = 0,5739. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que la masa esté entre 60 y 80 kg es aproximadamente 0,5739 (un 57,39 %).

4.1 b) Probabilidad de superar los 100 kg

Tipificamos el umbral de 100 kg:

$$z_{100} = \frac{100 - 75,67}{11,05} \approx 2,20.$$

La tabla proporciona la probabilidad acumulada a la izquierda. Como se pide superar ese valor, usamos el suceso complementario:

$$P(X > 100) = P(Z > 2,20) = 1 - \Phi(2,20) = 1 - 0,9861 = 0,0139.$$

Conclusión. La probabilidad de que un hombre supere los 100 kg es aproximadamente 0,0139.

4.1 c) No más de uno de diez hombres supera los 100 kg

Sea Y el número de hombres, entre los diez elegidos, cuya masa supera los 100 kg. Cada elección tiene probabilidad $p = 0,0139$ de éxito y $q = 1 - p = 0,9861$ de fracaso; al considerar ensayos independientes con la misma probabilidad, Y sigue una distribución binomial:

$$Y \sim \text{Bin}(10, 0,0139).$$

«No más de uno» significa $Y \leq 1$. La probabilidad binomial de obtener exactamente j éxitos en diez ensayos es $\binom{10}{j} p^j q^{10-j}$, por lo que

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= \binom{10}{0} (0,0139)^0 (0,9861)^{10} + \binom{10}{1} (0,0139) (0,9861)^9 \\ &\approx 0,9919. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de que como máximo uno de los diez hombres supere los 100 kg es aproximadamente 0,9919.

4.2 a) Probabilidad de que el corredor vuelva sin caerse

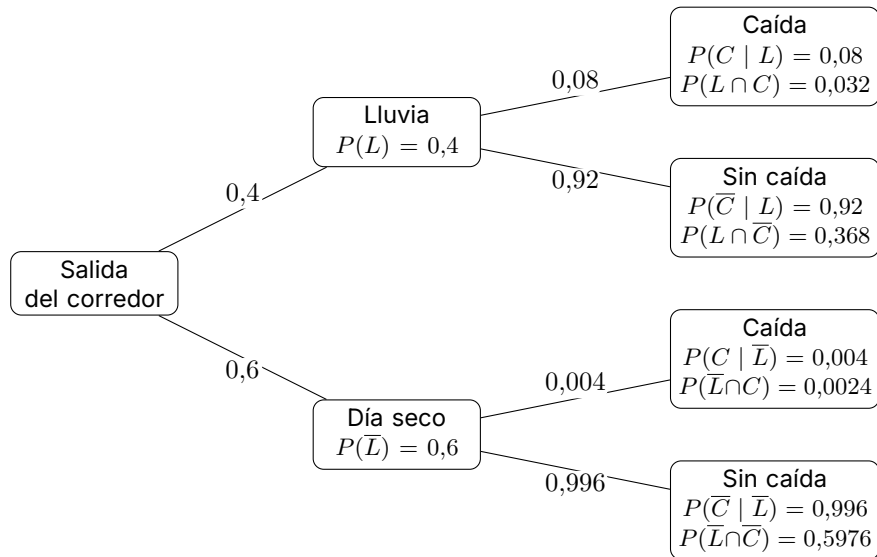
Sean L el suceso «llueve» y C el suceso «el corredor sufre una caída». Del enunciado,

$$P(C | L) = 0,08, \quad P(C | \bar{L}) = 0,004, \quad P(L \cap C) = 0,032.$$

Primero obtenemos la probabilidad de lluvia usando $P(L \cap C) = P(L)P(C | L)$:

$$P(L) = \frac{0,032}{0,08} = 0,4, \quad P(\bar{L}) = 0,6.$$

En cada camino del árbol se multiplican las probabilidades de las ramas para hallar la probabilidad conjunta; después sumamos los caminos incompatibles que terminan en «sin caída».



Por tanto,

$$P(\bar{C}) = P(L \cap \bar{C}) + P(\bar{L} \cap \bar{C}) = 0,368 + 0,5976 = 0,9656.$$

Conclusión. La probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído es 0,9656, es decir, un 96,56 %.

4.2 b) Probabilidad de que no llueva sabiendo que se ha caído

Buscamos $P(\bar{L} | C)$. Por la fórmula de probabilidad condicionada,

$$P(\bar{L} | C) = \frac{P(\bar{L} \cap C)}{P(C)}.$$

La probabilidad conjunta del numerador se obtiene multiplicando las probabilidades de las dos ramas del camino «día seco y caída»:

$$P(\bar{L} \cap C) = P(\bar{L})P(C | \bar{L}) = 0,6 \cdot 0,004 = 0,0024.$$

Para el denominador sumamos los dos casos incompatibles en que ocurre una caída:

$$P(C) = P(L \cap C) + P(\bar{L} \cap C) = 0,032 + 0,0024 = 0,0344.$$

Así,

$$P(\bar{L} | C) = \frac{0,0024}{0,0344} = \frac{3}{43} \approx 0,0698.$$

Conclusión. Sabiendo que se ha caído, la probabilidad de que no llueva es $\frac{3}{43} \approx 0,0698$ (un 6,98 %).