



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - f) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a , b , c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$ y su recta normal en el punto $(1, 8)$ es paralela al eje de ordenadas.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ (para $x \neq -3$, $x \neq 1$).

- a) **Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1.25 puntos)**
- b) **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$.

- a) **Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. (1.25 puntos)**
- b) **Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas. (1.25 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx$



**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

- Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$. **(0.5 puntos)**
- Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . **(1.75 puntos)**
- Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 1$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 2, 6)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$

- Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades. **(1.25 puntos)**
- Halla el simétrico del punto P respecto al plano π . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $B(-1, 0, -1)$, $C(0, 1, -3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

- Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C . **(1.25 puntos)**
- Siendo $D(1, -1, -2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B , C y D . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a , b , c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$ y su recta normal en el punto $(1, 8)$ es paralela al eje de ordenadas.

Si la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$ quiere decir que $f(0) = 4$ y que $f''(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \Rightarrow \boxed{d = 4}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow 0 = 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + cx + 4$.

Si la función tiene una recta normal en el punto $(1, 8)$ paralela al eje de ordenadas significa que $f(1) = 8$ y que la recta tangente en dicho punto es paralela al eje de abscisas, es decir, que $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + cx + 4 \\ f(1) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = a \cdot 1^3 + c \cdot 1 + 4 \Rightarrow 8 = a + c + 4 \Rightarrow \boxed{a + c = 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + cx + 4 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + c \Rightarrow \boxed{0 = 3a + c}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 4 \\ c = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a = 4 \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -3 \cdot (-2) = 6}$$

Los valores buscados son $a = -2$, $b = 0$, $c = 6$ y $d = 4$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ (para $x \neq -3$, $x \neq 1$).

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

a) Por la expresión de la función deducimos que el denominador se anula en $x = -3$ y en $x = 1$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(-3)^2 - 10}{(-3)^2 + 2(-3) - 3} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1^2 - 10}{1^2 + 2(1) - 3} = \frac{-9}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{10}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{10}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$y = 1$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existen pues tiene asíntota horizontal.

Resumiendo: La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 1$ y una asíntota horizontal: $y = 1$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2x - 3) - (2x + 2)(x^2 - 10)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

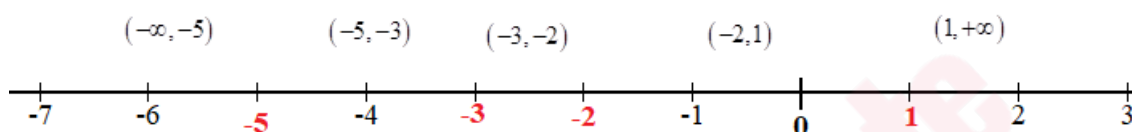
$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x - (2x^3 - 20x + 2x^2 - 20)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 4x^2 - 6x - \cancel{2x^3} + 20x - 2x^2 + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 14x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 40}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-7+3}{2} = \boxed{-2=x} \\ \frac{-7-3}{2} = \boxed{-5=x} \end{cases}$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos los valores excluidos del dominio ($x = -3$ y $x = 1$).



En el intervalo $(-\infty, -5)$ tomamos $x = -6$ y la derivada vale

$$f'(-6) = \frac{2(-6)^2 + 14(-6) + 20}{((-6)^2 + 2(-6) - 3)^2} = \frac{8}{441} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -5).$$

En el intervalo $(-5, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{2(-4)^2 + 14(-4) + 20}{((-4)^2 + 2(-4) - 3)^2} = -\frac{4}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-5, -3).$$

En el intervalo $(-3, -2)$ tomamos $x = -2.5$ y la derivada vale

$$f'(-2.5) = \frac{2(-2.5)^2 + 14(-2.5) + 20}{((-2.5)^2 + 2(-2.5) - 3)^2} = -\frac{40}{49} < 0. \text{ La función decrece en } (-3, -2).$$

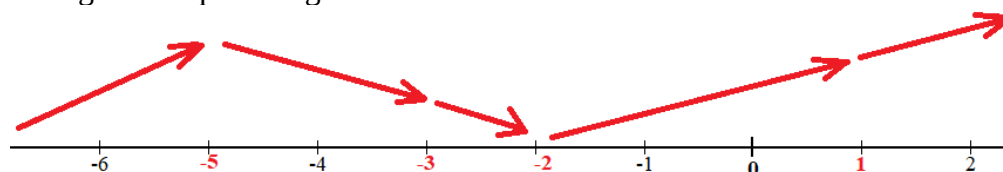
En el intervalo $(-2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 0 + 20}{(0^2 + 0 - 3)^2} = \frac{20}{9} > 0$.

La función crece en $(-2, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 28 + 20}{(2^2 + 4 - 3)^2} = \frac{56}{25} > 0$.

La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -5) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-5, -3) \cup (-3, -2)$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$.

- a) Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. **(1.25 puntos)**
- b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas. **(1.25 puntos)**

- a) Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = a$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^x \Rightarrow f(a) = e^a \\ f'(x) = e^x \Rightarrow f'(a) = e^a \\ y - f(a) = f'(a)(x - a) \end{array} \right\} \Rightarrow y - e^a = e^a(x - a) \Rightarrow y - e^a = e^a x - ae^a \Rightarrow y = e^a x - ae^a + e^a$$

Averiguamos el valor de “a” para que la recta tangente pase por (0, 0).

$$\left. \begin{array}{l} y = e^a x - ae^a + e^a \\ \text{Pasa por (0,0)} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = e^a \cdot 0 - ae^a + e^a \Rightarrow -ae^a + e^a = 0 \Rightarrow e^a(-a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^a = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ -a + 1 = 0 \rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$$

El valor buscado es $a = 1$.

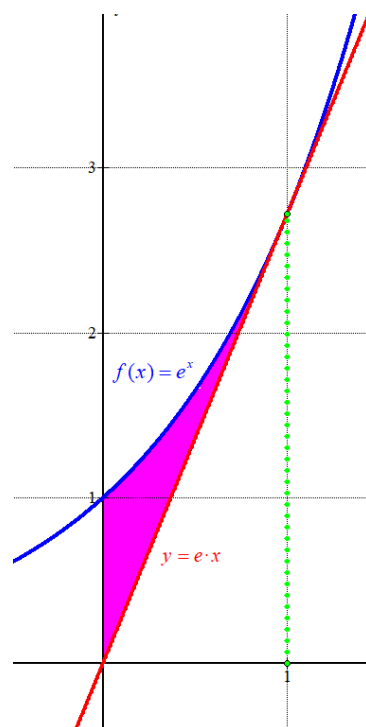
- b) Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, f(1))$.

$$\left. \begin{array}{l} y = e^a x - ae^a + e^a \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = e^1 x - e^1 + e^1 \Rightarrow \boxed{y = e \cdot x}$$

Dibujamos las gráficas de la función y la recta tangente para visualizar la región de la cual queremos hallar el área.

x	$f(x) = e^x$
-1	$1/e \approx 0.37$
0	1
1	$e \approx 2.72$
2	$e^2 \approx 7.39$

x	$y = e \cdot x$
-1	$-e \approx -2.72$
0	0
1	$e \approx 2.72$
2	$2e \approx 5.44$



El área de la región coloreada de rosa es el valor de la integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de la función y la tangente.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 e^x - e \cdot x dx = \left[e^x - \frac{e}{2} x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left[e^1 - \frac{e}{2} \cdot 1^2 \right] - \left[e^0 - \frac{e}{2} \cdot 0^2 \right] = e - \frac{e}{2} - 1 = \boxed{\frac{e}{2} - 1 \approx 0.36} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx$

Obtenemos la expresión de la función que aparece en el integrando como una función a trozos. Vemos cuando vale 0 y la función cambia de signo.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La función es positiva antes de 1 y también después de 2. Lo comprobamos.

En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la función vale $0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$.

En $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la función vale $1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 2 = -0.25 < 0$

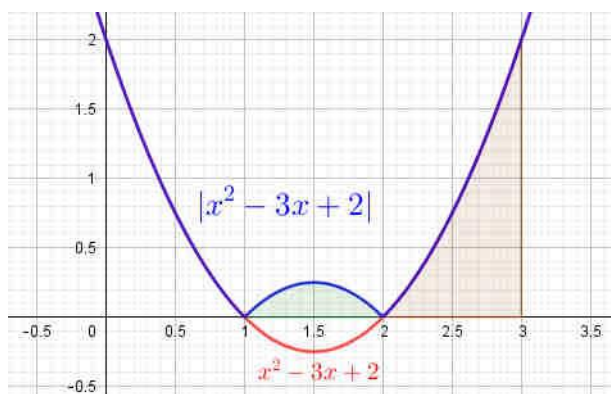
En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la función vale $3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2 > 0$

Por lo que la expresión de la función es $f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

La integral pedida se obtiene sumando dos:

$$\begin{aligned} \int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx &= \int_1^2 -x^2 + 3x - 2 dx + \int_2^3 x^2 - 3x + 2 dx = \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_2^3 = \\ &= \left(\left[-\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \right] \right) + \left(\left[\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \right] - \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right] \right) = \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) + \left(9 - \frac{27}{2} + 6 - \frac{8}{3} + 6 - 4 \right) = \\ &= \left(-\frac{7}{3} + 4 - \frac{3}{2} \right) + \left(17 - \frac{27}{2} - \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \boxed{1} \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2| dx = 1$



BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

a) Sabemos que $|A| = 5$.

$$|2A^3| = 2^3 |A^3| = 8 |A \cdot A \cdot A| = 8 |A| \cdot |A| \cdot |A| = 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1000$$

b) Calculamos el valor del primer determinante.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} &= \left\{ \text{Sacamos factor común 2 en 1ª columna} \right\} = 2 \begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 1/2 & 3 \\ c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \text{Sacamos factor común 3 en 3ª columna} \right\} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 1/2 & 1 \\ c & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicamos por } -2 \text{ la 2ª columna} \\ \text{y por } -1/2 \text{ fuera del determinante} \end{array} \right\} = 6 \cdot \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & -1 & 3 \\ c & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 |A| = -3 \cdot 5 = \boxed{-15} \end{aligned}$$

El segundo determinante.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{A la 2ª fila le resto la 1ª fila} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{A la 3ª fila le resto la 1ª fila} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Transponemos la matriz} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \text{Saco factor común 2 en 2ª columna} \right\} = 2 \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot |A| = \boxed{10} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m . **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 1$. **(0.75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & 1 \\ 2 & m & m & 2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & m+1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m(2m+2m+2+m-4m-m-m-1)$$

$$|A| = m(1-m)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

Estudiamos por separado 3 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para

obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\ -2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0}^A & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{}_{A/B} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1}^A & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{}_{A/B} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- b) El sistema tiene infinitas soluciones cuando $m=1$. Determinamos las soluciones partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=-z \end{array} \right\} \Rightarrow x-z+z=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x=1 \\ y=-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Las soluciones son: $x=1; y=-\lambda; z=\lambda; \lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

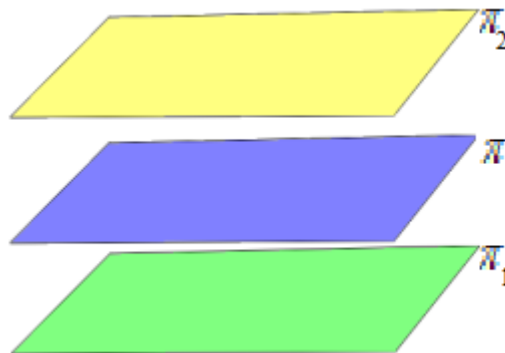
Considera el punto $P(1, 2, 6)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades.

(1.25 puntos)

b) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π . **(1.25 puntos)**

a) Un plano paralelo a $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x - y + z + D = 0$.



Como son paralelos la distancia entre ellos es la distancia entre un punto de π y el plano π' .

$$\pi \equiv 2x - y + z = 0 \Rightarrow P(0, 0, 0) \in \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ P(0, 0, 0) \in \pi \\ \pi' \equiv 2x - y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{6}}$$

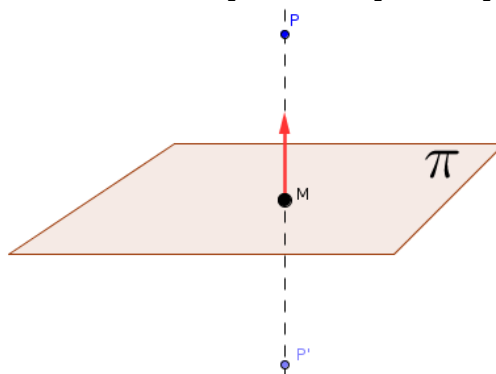
Nos piden hallar los planos paralelos a distancia $\sqrt{6}$.

$$\left. \begin{array}{l} d(\pi, \pi') = \frac{|D|}{\sqrt{6}} \\ d(\pi, \pi') = \sqrt{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow |D| = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow |D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D = 6 \\ D = -6 \end{cases}$$

Existen dos planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z + 6 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - y + z - 6 = 0$$

b) Queremos hallar un punto P' simétrico del punto P respecto al plano π .



Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto P .

$$\pi \equiv 2x - y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 6) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - 2 + \lambda + 6 + \lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 3, 5)$$

El punto P' se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (-1, 3, 5) - (1, 2, 6) = (-2, 1, -1)$$

$$P' = (-1, 3, 5) + (-2, 1, -1) = (-3, 4, 4)$$

El punto P' simétrico del punto P respecto al plano π es $P' = (-3, 4, 4)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $B(-1, 0, -1)$, $C(0, 1, -3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

a) Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C. **(1.25 puntos)**

b) Siendo $D(1, -1, -2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B, C y D. **(1.25 puntos)**

a) Un punto A de la recta r tiene coordenadas $A(-\lambda, 1 + 2\lambda, -1 + \lambda)$.

Si equidista de B y C debe ser $d(A, B) = d(A, C)$. Lo cual implica que los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son iguales.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -1) - (-\lambda, 1 + 2\lambda, -1 + \lambda) = (-1 + \lambda, -1 - 2\lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -3) - (-\lambda, 1 + 2\lambda, -1 + \lambda) = (\lambda, -2\lambda, -2 - \lambda)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow \sqrt{(-1 + \lambda)^2 + (-1 - 2\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2 + (-2\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda^2} = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4 + \lambda^2 + 4\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6\lambda^2 + 2\lambda + 2} = \sqrt{6\lambda^2 + 4\lambda + 4} \Rightarrow 6\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 6\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \Rightarrow A(-(-1), 1 - 2, -1 - 1) \Rightarrow \boxed{A(1, -1, -2)}$$

El punto A que buscamos es $A(1, -1, -2)$.

b) El área del triángulo BCD es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BC} = (0, 1, -3) - (-1, 0, -1) = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{BD} = (1, -1, -2) - (-1, 0, -1) = (2, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (1, 1, -2) \\ \overrightarrow{BD} = (2, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = -i - 4j - k - 2k + j - 2i = -3i - 3j - 3k = (-3, -3, -3)$$

$$\text{Área ABC} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{27}}{2} \approx 2.598u^2}$$