

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de coincidencias 2020-2021

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Matrices y discusión de un sistema

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad e inversa de A

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(m+1).$$

Por tanto, A es invertible si y solo si $m \neq -1$. Para esos valores, calculamos la matriz adjunta a partir de los cofactores. La matriz de cofactores es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & -m \end{pmatrix},$$

por lo que su traspuesta es la adjunta:

$$\text{Adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

Usando $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det A}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad m \neq -1.$$

Conclusión. A es invertible para $m \neq -1$ y su inversa es la matriz anterior.

b) Discusión del sistema $A \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = B$

Si $m \neq -1$, el determinante no se anula, por lo que $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene el mismo rango, y por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado. Para estudiar el valor singular $m = -1$, escribimos el sistema:

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ -x + y = 1, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada para $m = -1$ son

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{-1}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Las filas primera, segunda y tercera de A_{-1} cumplen $F_1 = F_2 + F_3$, mientras que sus términos independientes no cumplen la misma relación ($0 \neq 1 + 0$). Además, el menor de A_{-1} formado por sus dos últimas filas y las dos primeras columnas vale $-1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A_{-1}) = 2$. El menor de A_{-1}^* formado por las tres filas y las columnas primera, segunda y cuarta vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A_{-1}^*) = 3$. Como los rangos son distintos, Rouché-Frobenius concluye que el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $m \neq -1$ e incompatible si $m = -1$.

c) Resolución para $m = 2$

Como $2 \neq -1$, el sistema tiene solución única. Las ecuaciones son

$$y + z = 0, \quad 2x + y = 1, \quad x + z = 0.$$

De la primera y la tercera, $y = -z = x$, así que la segunda queda $3x = 1$. Por tanto,

$$x = y = \frac{1}{3}, \quad z = -\frac{1}{3}.$$

Conclusión. Para $m = 2$, la solución es $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

A.2. Optimización del volumen de un acuario

Sea $x > 0$ el lado de la base cuadrada y h la altura. La tapa y la base tienen área x^2 cada una; las cuatro caras laterales suman un área de $4xh$. Por tanto, el coste total es

$$C = 15x^2 + 90x^2 + 25(4xh) = 105x^2 + 100xh.$$

a) Altura en función de x y C

Despejamos h en la ecuación del coste:

$$100xh = C - 105x^2 \implies h = \frac{C - 105x^2}{100x}.$$

Conclusión. La altura es $h(x, C) = \frac{C - 105x^2}{100x}$, con $x > 0$.

b) Volumen máximo con un presupuesto de 1260 euros

Para una base de lado x y altura h , el volumen es $V = x^2h$. Si se fija x , el volumen aumenta con h , así que para maximizarlo se debe emplear todo el presupuesto, es decir, $C = 1260$. Sustituyendo la altura:

$$V(x) = x^2 \frac{1260 - 105x^2}{100x} = 12,6x - 1,05x^3.$$

La condición $h \geq 0$ exige $1260 - 105x^2 \geq 0$, por lo que $0 < x \leq \sqrt{12}$. En los extremos del intervalo el volumen es cero; buscamos los puntos críticos interiores derivando:

$$V'(x) = 12,6 - 3,15x^2.$$

Igualamos a cero para localizar los posibles extremos:

$$12,6 - 3,15x^2 = 0 \implies x^2 = 4.$$

Como x es una longitud positiva, $x = 2$. Además, $V'(x) > 0$ si $0 < x < 2$ y $V'(x) < 0$ si $2 < x \leq \sqrt{12}$, de modo que en $x = 2$ se alcanza el máximo. La altura y el volumen correspondientes son

$$h = \frac{1260 - 105 \cdot 2^2}{100 \cdot 2} = \frac{840}{200} = \frac{21}{5} \text{ m}, \quad V_{\text{máx}} = 2^2 \cdot \frac{21}{5} = \frac{84}{5} \text{ m}^3.$$

Conclusión. El volumen máximo es $\frac{84}{5} \text{ m}^3 = 16,8 \text{ m}^3$, con lado de base 2 m y altura $\frac{21}{5} \text{ m}$.

A.3. Recta y plano en el espacio

El vector que une $P_2 = (0, 0, 0)$ con $P_1 = (1, 1, -1)$ es

$$\overrightarrow{P_2P_1} = P_1 - P_2 = (1 - 0, 1 - 0, -1 - 0) = (1, 1, -1).$$

Como la recta r es perpendicular al plano π , este vector puede tomarse como vector director de r y como vector normal de π .

a) Ecuación de r

La recta pasa por P_2 y tiene dirección $(1, 1, -1)$, por lo que su ecuación paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Una ecuación paramétrica de r es la anterior.

b) Ecuación de π

Un plano con vector normal $(1, 1, -1)$ que pasa por el origen tiene ecuación general

$$x + y - z + D = 0.$$

Al sustituir $(0, 0, 0)$ obtenemos $D = 0$. **Conclusión.** El plano es $\pi : x + y - z = 0$.

c) Distancia de P_1 al plano

Para un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia es

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En este caso $P_1 = (1, 1, -1)$ y π tiene coeficientes $(A, B, C, D) = (1, 1, -1, 0)$:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Conclusión. La distancia de P_1 a π es $\sqrt{3}$.

A.4. Probabilidad con extracción y traslado de calcetines

Llamamos R al suceso «se traslada un calcetín rojo» y V a «se traslada uno verde». Las probabilidades son $P(R) = 6/10 = 3/5$ y $P(V) = 4/10 = 2/5$. Tras el traslado siempre hay 15 calcetines en el segundo cajón.

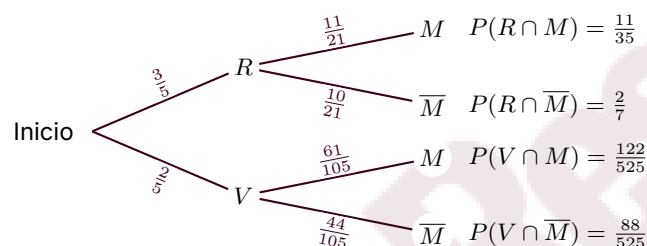
Si se traslada un calcetín rojo, el segundo cajón queda con 5 rojos y 10 verdes; si se traslada uno verde, queda con 4 rojos y 11 verdes. Para extraer dos calcetines del mismo color sin reemplazo usamos

$$P(\text{mismo color}) = \frac{\binom{r}{2} + \binom{v}{2}}{\binom{15}{2}},$$

donde r y v son las cantidades de rojos y verdes en el segundo cajón. Calculamos las probabilidades condicionadas de obtener el mismo color:

$$P(M | R) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{11}{21}, \quad P(M | V) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{11}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{61}{105},$$

donde M representa que los dos calcetines extraídos sean del mismo color. El árbol muestra las probabilidades de cada rama y, al final, las probabilidades conjuntas de cada camino. En cada camino multiplicamos la probabilidad del traslado por la probabilidad condicionada de su resultado:



Los dos caminos que terminan en «mismo color» son incompatibles, por lo que sumamos sus probabilidades:

$$P(\text{mismo color}) = \frac{11}{35} + \frac{122}{525} = \frac{165 + 122}{525} = \frac{287}{525} = \frac{41}{75}.$$

Conclusión. La probabilidad de que los dos calcetines extraídos del segundo cajón sean del mismo color es $\frac{41}{75}$.

B.1. Sistema de ecuaciones para las ventas de café

Sean G , P y C los kilogramos vendidos de Gold Cuvée, Paradiso y Cremissimo, respectivamente. Sus precios son por kilogramo. Las cantidades de grano Robusta usadas son el 10 %, el 15 % y el 20 % de cada producto. Las condiciones del enunciado proporcionan

$$\begin{cases} 7,85G + 13,30P + 24,85C = 3112,5, \\ 0,10G + 0,15P + 0,20C = 27,1, \\ C = 2(G + P). \end{cases}$$

Sustituimos $C = 2G + 2P$ en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 57,55G + 63P = 3112,5, \\ 0,50G + 0,55P = 27,1. \end{cases}$$

Para evitar decimales, multiplicamos la primera ecuación por 100 y la segunda por 100:

$$\begin{cases} 5755G + 6300P = 311250, \\ 50G + 55P = 2710. \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre 5, dejamos el sistema reducido sin decimales:

$$\begin{cases} 5755G + 6300P = 311250, \\ 10G + 11P = 542. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 5755 & 6300 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 5755 & 6300 & 311250 \\ 10 & 11 & 542 \end{array} \right).$$

Como $\det A = 5755 \cdot 11 - 6300 \cdot 10 = 305 \neq 0$, el sistema tiene solución única. De la segunda ecuación, $G = (542 - 11P)/10$. Al sustituir en la ecuación de ingresos:

$$5755 \left(\frac{542 - 11P}{10} \right) + 6300P = 311250$$

$$311921 - 6330,5P + 6300P = 311250 \implies 30,5P = 671 \implies P = 22.$$

Entonces $G = 30$ y $C = 2(30 + 22) = 104$. La cantidad de grano Arábica es el 90 % de G , el 85 % de P y el 80 % de C :

$$0,90(30) + 0,85(22) + 0,80(104) = 27 + 18,7 + 83,2 = 128,9 \text{ kg.}$$

Conclusión. Durante el mes se utilizaron 128,9 kg de grano Arábica.

B.2. Valor absoluto, extremos y derivada

Como $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, la función es $f(x) = 5|x-2|$. Está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, pues el radicando es un cuadrado, siempre no negativo. Por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 10 - 5x, & x < 2, \\ 5x - 10, & x \geq 2. \end{cases}$$

a) Continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$

Cada tramo es polinómico, luego continuo. En el punto de unión:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad f(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0.$$

Los límites laterales coinciden con el valor de la función, de modo que es continua en 2 y, por tanto, en todo $[-2, 4]$.

Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales de las expresiones por tramos:

$$f'_-(2) = -5, \quad f'_+(2) = 5.$$

Como no coinciden, f no es derivable en 2. **Conclusión.** f es continua en todo $[-2, 4]$ y derivable salvo en $x = 2$.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos absolutos

En cada tramo, la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -5, & x < 2, \\ 5, & x > 2. \end{cases}$$

La derivada negativa indica que f decrece en $[-2, 2]$; la derivada positiva indica que crece en $[2, 4]$. El cambio de decreciente a creciente en $x = 2$ da un mínimo absoluto, cuyo valor es $f(2) = 0$. Para determinar el máximo absoluto comparamos los extremos del intervalo:

$$f(-2) = 5|-2-2| = 20, \quad f(4) = 5|4-2| = 10.$$

Conclusión. El mínimo absoluto es 0 en $x = 2$ y el máximo absoluto es 20 en $x = -2$.

c) Continuidad y recta tangente de $g = f'$ en $x = 2$

La función derivada está dada por

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} -5, & x < 2, \\ 5, & x > 2. \end{cases}$$

En $x = 2$, $f'(2)$ no existe, así que $g(2)$ no está definido. Aunque los límites laterales de g son -5 y 5 , no existe un valor de $g(2)$ que los haga coincidir; por ello, g no es continua en ese punto. Además, al no estar definida la función en $x = 2$, su gráfica no tiene allí recta tangente. **Conclusión.** g no está definida ni es continua en $x = 2$, y no tiene recta tangente en ese punto.

B.3. Rayo láser y plano

La trayectoria del rayo que parte de $P = (2, 3, -5)$ con dirección $\vec{v} = (-1, -2, 2)$ se expresa paramétricamente como

$$r : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = -5 + 2t, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

El plano es $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$, con vector normal $\vec{n} = (3, -2, -2)$.

a) Punto de impacto

El impacto se produce donde la recta corta al plano. Sustituimos las coordenadas paramétricas en la ecuación de π :

$$3(2 - t) - 2(3 - 2t) - 2(-5 + 2t) = 1 \implies 10 - 3t = 1 \implies t = 3.$$

Como $t = 3 \geq 0$, el punto pertenece al rayo emitido. Sus coordenadas son

$$Q = (2 - 3, 3 - 2 \cdot 3, -5 + 2 \cdot 3) = (-1, -3, 1).$$

Conclusión. El rayo impacta en $Q = (-1, -3, 1)$.

b) Ángulo entre el rayo y el plano

El ángulo α entre una recta de vector director $\vec{v}$ y un plano de normal $\vec{n}$ cumple

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|}.$$

Esta relación se debe a que el ángulo entre la recta y la normal del plano es complementario de α . Calculamos:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-1)3 + (-2)(-2) + 2(-2) = -3, \quad \|\vec{v}\| = 3, \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{17}.$$

Así,

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \alpha = \text{arc sen} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) \approx 14,0^\circ < 45^\circ.$$

Conclusión. El ángulo es menor que 45° , por lo que el rayo se refleja y no perfora la placa.

c) Origen del segundo rayo perpendicular

Para que dos rayos perpendiculares al mismo plano impacten en el mismo punto, sus rectas normales deben coincidir. Por ello, el nuevo origen debe ser el simétrico de P respecto de π : estará al otro lado del plano y su proyección ortogonal será la misma.

La distancia de un punto P al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtiene con

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Para hallar el pie de la perpendicular, restamos a P su componente en la dirección normal:

$$H = P - \frac{3(2) - 2(3) - 2(-5) - 1}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (2, 3, -5) - \frac{9}{17} (3, -2, -2) = \left(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, -\frac{67}{17} \right).$$

El punto simétrico es $P' = 2H - P$:

$$P' = 2 \left(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, -\frac{67}{17} \right) - (2, 3, -5) = \left(-\frac{20}{17}, \frac{87}{17}, -\frac{49}{17} \right).$$

La recta normal por P corta al plano en H , y la normal por P' también pasa por H ; así ambos rayos comparten el punto de impacto. **Conclusión.** El origen del segundo rayo debe situarse en $\left(-\frac{20}{17}, \frac{87}{17}, -\frac{49}{17} \right)$.

B.4. Distribución binomial

Sea X el número de penaltis marcados en la tanda. Cada lanzamiento tiene dos resultados (marcar o no marcar), la probabilidad de marcar es constante $p = 3/5$ y los lanzamientos se consideran independientes. Por tanto,

$$X \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{3}{5}\right), \quad q = 1 - p = \frac{2}{5}.$$

a) Probabilidad de no marcar en cuatro disparos

No marcar significa obtener cero aciertos en los cuatro lanzamientos. Por la fórmula binomial:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}.$$

Conclusión. La probabilidad de no marcar es $\frac{16}{625}$.

b) Probabilidad de marcar más de dos penaltis

«Más de dos» significa $X = 3$ o $X = 4$. Sumamos las probabilidades binomiales correspondientes:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= \binom{4}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right) + \binom{4}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \\ &= \frac{4 \cdot 27 \cdot 2}{625} + \frac{81}{625} = \frac{297}{625} = 0,4752. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de marcar más de dos penaltis es $\frac{297}{625} = 0,4752$.

c) Número de lanzamientos para superar una probabilidad de 0.999

Con n lanzamientos, resulta más sencillo calcular el suceso complementario: no marcar ninguno, cuya probabilidad es $(2/5)^n$. Por tanto,

$$P(\text{al menos un gol}) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Queremos que esta probabilidad sea mayor que 0,999:

$$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0,999 \iff \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0,001.$$

Tomando logaritmos y teniendo en cuenta que $\ln(2/5) < 0$, la desigualdad se invierte al dividir:

$$n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(2/5)} \approx 7,54.$$

El menor número entero que cumple la condición es $n = 8$. En efecto,

$$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^7 = 0,9983616 < 0,999, \quad 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^8 = 0,99934464 > 0,999.$$

Conclusión. Debe lanzar al menos 8 penaltis.