

CATALUÑA · PAU 2015 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

6 ejercicios

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

2 puntos

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$

a) 1 punto

Determine para qué valores de a existe A^{-1} .

b) 1 punto

Calcule A^{-1} para $a = 0$.

Ejercicio 2

2 puntos

En el espacio tridimensional considere la recta $r : (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$ y los planos $\pi_1 : x + y + z = -1$ y $\pi_2 : (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π_2 .

b) 1 punto

Encuentre los dos puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 3

2 puntos

Sea la función $f(x) = e^x - x - 2$

a) 1 punto

Demuestre que la función f tiene una raíz (un cero) en el intervalo $[0, 2]$.

b) 1 punto

Compruebe que la función es monótona en el intervalo $[0, 2]$ y calcule las coordenadas de los puntos mínimo absoluto y máximo absoluto de la función en este intervalo.

Ejercicio 4

2 puntos

Sean los planos de $\mathbb{R}^3$ $\pi_1 : y + z = 2$, $\pi_2 : -2x + y + z = 1$ y $\pi_3 : 2x - 2z = -1$.

a) 1 punto

Calcule la posición relativa de los tres planos.

b) 1 punto

Compruebe que el plano π_3 es paralelo a la recta definida por la intersección de los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 5

2 puntos

Sean x e y las medidas de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 2.

a) 1 punto

Compruebe que la superficie del rectángulo, en función de x , viene dada por la expresión

$$S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

b) 1 punto

Calcule los valores de las medidas x e y para los cuales la superficie del rectángulo es máxima y calcule el valor de esta superficie máxima.

Ejercicio 6

2 puntos

Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que sean inversas de ellas mismas, es decir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.