

Modelo 2 de 2005

Asíntotas, integrales, sistemas, matrices y geometría.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Al acercarnos a $x = 1$, el numerador tiende a $e > 0$ y el denominador a cero, con signos opuestos a cada lado; así, $x = 1$ es asíntota vertical. Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0,$$

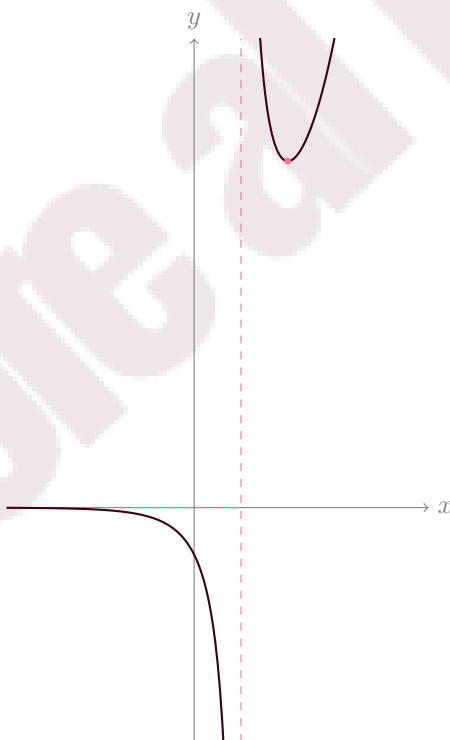
de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Para $x \rightarrow +\infty$, la función crece exponencialmente y no tiene asíntota horizontal ni oblicua. Derivamos para estudiar la monotonía:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

El denominador es positivo y el signo lo determina $x - 2$: f decrece en $(-\infty, 1)$ y $(1, 2)$, y crece en $(2, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(2, e^2)$. Para la curvatura,

$$f''(x) = \frac{e^x((x-2)^2 + 1)}{(x-1)^3}.$$

El numerador es positivo, así que la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$. No hay punto de inflexión en $x = 1$, que no pertenece al dominio.



Opción A - Ejercicio 2

El denominador factoriza como $(x-2)(x+1)$. Al dividir y descomponer el resto,

$$\frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} = 3x + 4 - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x-2}.$$

Integramos término a término en cualquier intervalo que no cruce $x = -1$ ni $x = 2$:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x - 3 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{pmatrix}.$$

El determinante es $\det A = m(m+1)$. Si $m \neq 0, -1$, el sistema es SCD. Para $m = 0$, el sistema queda

$$x + 3y + z = 5, \quad 2z = 0, \quad -z = 0,$$

por lo que $z = 0$ y quedan dos ecuaciones independientes para x, y ; es SCI y $(x, y, z) = (5 - 3t, t, 0)$. Para $m = -1$, la segunda y tercera ecuaciones exigen $-x + 2z = 0$ y $-y - z = -1$; junto con la primera, estas son incompatibles: por ejemplo, sumando apropiadamente se obtiene contradicción (equivalentemente, $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg } A^* = 3$). No hay más casos. Cuando $m = 1$, por sustitución se obtiene

$$(x, y, z) = (-2, 2, 1).$$

Opción A - Ejercicio 4

La dirección de r , intersección de planos con normales $(2, -1, 0)$ y $(1, 0, 1)$, es su producto vectorial, proporcional a $(-1, -2, 1)$. Un plano perpendicular a la recta tiene este vector como normal. Al pasar por $P = (1, 0, -3)$ resulta

$$-(x - 1) - 2y + (z + 3) = 0, \quad x + 2y - z - 4 = 0.$$

La recta se parametriza como $(x, y, z) = (0, -1, 0) + t(1, 2, -1)$. Para hallar el simétrico, proyectamos P sobre ella. Con $Q = (0, -1, 0)$ y $d = (1, 2, -1)$,

$$t = \frac{(P - Q) \cdot d}{|d|^2} = \frac{(1, 1, -3) \cdot (1, 2, -1)}{6} = 1, \quad H = Q + d = (1, 1, -1).$$

El simétrico es $P' = 2H - P$, de donde $P' = (1, 2, 1)$.

Opción B - Ejercicio 1

La distancia al origen desde $(x, 5 - x^2)$ se minimiza al minimizar su cuadrado:

$$D^2(x) = x^2 + (5 - x^2)^2.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$(D^2)' = 2x - 4x(5 - x^2) = 2x(2x^2 - 9) = 0,$$

por lo que $x = 0$ o $x = \pm 3/\sqrt{2}$. En $x = 0$ la distancia es 5; en los otros dos puntos, $y = 1/2$ y

$$D = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2} < 5.$$

Así, los puntos más próximos son $(\pm 3/\sqrt{2}, 1/2)$ y la distancia mínima es $\sqrt{19}/2$. **Opción B - Ejercicio 2**

La continuidad en $x = 8$ exige que los dos tramos coincidan. El segundo vale $(64 - 32)/(8 - 4) = 8$, así que $\sqrt{8a} = 8$ y, como el radicando debe ser no negativo, $a = 8$. Para integrar el primer tramo,

$$\int_0^8 \sqrt{8x} dx = \frac{128}{3}.$$

En el segundo, la división da

$$\frac{x^2 - 32}{x - 4} = x + 4 - \frac{16}{x - 4}.$$

Por tanto,

$$\int_8^{10} f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16 \ln(x - 4) \right]_8^{10} = 26 - 16 \ln \frac{3}{2}.$$

La integral pedida es

$$\int_0^{10} f(x) dx = \frac{206}{3} - 16 \ln \frac{3}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Como A es invertible ($\det A = -1$), de $AXA = B$ se obtiene $X = A^{-1}BA^{-1}$. La inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos en dos pasos:

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & -8 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}(BA^{-1}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La coplanaridad equivale a que $(A - B) \cdot ((C - B) \times (D - B)) = 0$. Tenemos

$$C - B = (1, 1, 1), \quad D - B = (7, 1, -1), \quad (C - B) \times (D - B) = (-2, 8, -6).$$

Además, $A - B = (m, -1, -1)$, así que $-2m - 8 + 6 = 0$ y $m = -1$. Un normal al plano es $(1, -4, 3)$; al pasar por $B = (0, 1, 2)$, el plano es

$$x - 4y + 3z - 2 = 0.$$

El producto vectorial anterior es distinto de cero, por lo que B, C, D no son colineales: **no están alineados**.