

PAU Madrid - Matemáticas II

Acceso a la Universidad para mayores de 25 años - UAM, 2025

El examen permite elegir una de las opciones A o B. Se resuelven ambas para repasar todos los ejercicios.

Opción A. Ejercicio 1. Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Existencia de inversas

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 1 = -2.$$

Así, A es invertible. Su inversa, obtenida mediante la matriz adjunta y comprobable por producto, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para B :

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0.$$

Conclusión. A tiene inversa, dada arriba; B no tiene inversa porque su determinante es cero.

b) Ecuación $AX - B = I$

Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda para aislar X :

$$AX = I + B \implies X = A^{-1}(I + B).$$

Como

$$I + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la multiplicación da

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La solución de $AX - B = I$ es la matriz X anterior.

c) Ecuación $2A - 3BX = 2I$

Reordenamos para expresar la ecuación como un producto por B :

$$BX = \frac{2}{3}(A - I).$$

La singularidad de B por sí sola no decide si esta ecuación es compatible. Buscamos una condición necesaria: el vector $q = (-3, -5, 1)^T$ cumple $q^T B = (0, 0, 0)$, así que al multiplicar la igualdad por q^T a la izquierda necesariamente debería cumplirse $q^T(A - I) = 0$. Sin embargo,

$$q^T(A - I) = (3, 9, -11) \neq (0, 0, 0).$$

La condición necesaria falla. **Conclusión.** La ecuación matricial $2A - 3BX = 2I$ no tiene solución.

Opción A. Ejercicio 2. Asíntotas y monotonía local

La función es

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{3x(x-3)}.$$

Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, porque esos son los ceros del denominador y no anulan el numerador.

a) Asíntotas

En los puntos excluidos, el numerador no se anula. Además,

$$f(x) \sim -\frac{1}{9x} \quad (x \rightarrow 0), \quad f(x) \sim \frac{4}{9(x-3)} \quad (x \rightarrow 3).$$

Por ello,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty,$$

y $x = 0$ y $x = 3$ son asíntotas verticales. Para $x \rightarrow \pm\infty$, numerador y denominador son de igual grado; el cociente de sus coeficientes principales es $1/3$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 9x} = \frac{1}{3}.$$

Así, $y = \frac{1}{3}$ es horizontal en ambos extremos y no hay oblicuas. **Conclusión.** Las asíntotas son $x = 0$, $x = 3$ e $y = \frac{1}{3}$.

b) Crecimiento o decrecimiento alrededor de $x = 2$

Derivamos la función racional y factorizamos:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)3x(x-3) - 3(x-1)^2(2x-3)}{[3x(x-3)]^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{3x^2(x-3)^2}.$$

En el intervalo $(1, 3)$, que contiene a 2 y no cruza puntos fuera del dominio, $x-1 > 0$, $x+3 > 0$ y el denominador es positivo. Por tanto, $f'(x) < 0$ en ese entorno. **Conclusión.** f es decreciente alrededor de $x = 2$.

Opción A. Ejercicio 3. Posición relativa y distancia

Cada recta es la intersección de dos planos. El producto vectorial de sus normales da un vector director, pues es perpendicular a ambas normales y, por tanto, paralelo a la recta.

$$\vec{d}_r = (4, -1, -1) \times (2, -1, 1) = (-2, -6, -2) \sim (1, 3, 1),$$

$$\vec{d}_s = (1, -3, -2) \times (2, 1, -1) = (5, -3, 7).$$

Para obtener puntos, fijamos $z = 0$ en las ecuaciones de cada recta. Así se encuentran $R = (0, -1, 0) \in r$ y $S = (3, 0, 0) \in s$. Las rectas en forma paramétrica son

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 3 + 5u \\ y = -3u \\ z = 7u \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

Los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas. Además,

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (3 - 0, 0 - (-1), 0 - 0) = (3, 1, 0),$$

$$(\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \cdot \overrightarrow{RS} = (24, -2, -18) \cdot (3, 1, 0) = 70 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo prueba que las rectas no son coplanarias; por tanto, son alabeadas. La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula con

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)|}{\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\|}.$$

El módulo del producto vectorial es

$$\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\| = \sqrt{24^2 + (-2)^2 + (-18)^2} = \sqrt{904} = 2\sqrt{226}.$$

Conclusión. Las rectas son alabeadas y su distancia es $\frac{70}{2\sqrt{226}} = \frac{35}{\sqrt{226}}$.

Opción A. Ejercicio 4. Distribución normal

Sea X el tiempo de fabricación, medido en meses. El modelo es $X \sim N(50, 6)$, donde la media es 50 y la desviación típica es 6. Estandarizamos mediante $Z = \frac{X-50}{6} \sim N(0, 1)$.

a) Menos de 60 meses

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60 - 50}{6}\right) = P(Z < 1,67) \approx 0,9525.$$

Conclusión. La probabilidad de fabricar el buque en menos de 60 meses es aproximadamente 0,9525.

b) Más de 44 meses

$$P(X > 44) = P\left(Z > \frac{44 - 50}{6}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0,8413,$$

donde en la última igualdad usamos la simetría de la normal estándar. **Conclusión.** La probabilidad de que tarde más de 44 meses es aproximadamente 0,8413.

c) Entre 3 y 5 años

Convertimos los años a meses: 3 años son 36 meses y 5 años son 60 meses. Por tanto,

$$P(36 < X < 60) = P(-2,33 < Z < 1,67) = P(Z < 1,67) - P(Z < -2,33).$$

Con la tabla normal, $P(Z < 1,67) = 0,9525$ y $P(Z < -2,33) = 1 - 0,9901 = 0,0099$. Luego

$$P(36 < X < 60) \approx 0,9525 - 0,0099 = 0,9426.$$

Conclusión. Aproximadamente el 94,26 % de los pedidos se entregan entre los 3 y los 5 años.

Opción B. Ejercicio 1. Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -a & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2a & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Valores del parámetro para los que existe solución

Calculamos el determinante de A :

$$\det A = 2(a-1)(a+2).$$

Si $a \neq 1, -2$, el determinante es no nulo, así que $\text{rg}(A) = 3$, igual al número de incógnitas. Por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado y, en particular, tiene solución.

Para los valores singulares, $a = 1$ y $a = -2$, el rango de A es 2: por ejemplo, el menor de las dos primeras filas y columnas de x, y vale 3 si $a = 1$, mientras que para $a = -2$ el menor de las filas primera y tercera en esas columnas vale -2 . En ambos casos, el menor ampliado con las columnas de x, y y de términos independientes es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3a - 4,$$

que vale -7 para $a = 1$ y 2 para $a = -2$. Así, $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$, de modo que ambos sistemas son incompatibles. **Conclusión.** El sistema tiene solución para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$. Para los valores excluidos es SI.

b) Solución cuando $a = 2$

Sustituimos $a = 2$:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0, \\ x + y + 2z = 1, \\ x + 4z = -2. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación dividida entre 2 de la segunda se obtiene $2y = 1$, así que $y = \frac{1}{2}$. De la primera, $x + 2z = \frac{1}{2}$; al restarle la tercera, $-2z = \frac{5}{2}$, luego $z = -\frac{5}{4}$ y $x = 3$. **Conclusión.** Para $a = 2$, la solución es $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$.

Opción B. Ejercicio 2. Intersecciones y área entre curvas

Sean $f(x) = x^3 + 2x^2$ y $g(x) = -x^3 - x^2 + 1$. Para hallar los puntos de corte igualamos las funciones:

$$x^3 + 2x^2 = -x^3 - x^2 + 1 \iff 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Factorizamos:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 1)^2(2x - 1) = 0,$$

por lo que $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$. Las ordenadas se obtienen sustituyendo en cualquiera de las dos funciones:

$$f(-1) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

Conclusión. Los puntos de corte son $(-1, 1)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$.

b) Área entre las curvas para $-1 \leq x \leq 1$

La diferencia es

$$g(x) - f(x) = 1 - 3x^2 - 2x^3 = (x + 1)^2(1 - 2x).$$

En $[-1, \frac{1}{2}]$ esta diferencia es no negativa, y en $[\frac{1}{2}, 1]$ es no positiva. Por ello, dividimos el área en el punto de corte $x = \frac{1}{2}$:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1/2} (g - f) dx + \int_{1/2}^1 (f - g) dx.$$

Una primitiva de $g - f$ es $F(x) = x - x^3 - \frac{x^4}{2}$. La primera parte vale

$$\int_{-1}^{1/2} (g - f) dx = \left[x - x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_{-1}^{1/2} = \frac{27}{32}.$$

Una primitiva de $f - g$ es $-F(x)$, por lo que la segunda integral vale

$$\int_{1/2}^1 (f - g) dx = \left[-x + x^3 + \frac{x^4}{2} \right]_{1/2}^1 = \frac{27}{32}.$$

Conclusión. El área comprendida entre las gráficas en $[-1, 1]$ es $\frac{27}{16}$ unidades cuadradas.

Opción B. Ejercicio 3. Rectas y planos

La recta r es la intersección de los planos $2x - y + 2z = 1$ y $3x + 2y - z = 0$. Sus normales son $(2, -1, 2)$ y $(3, 2, -1)$; por tanto, un vector director es su producto vectorial:

$$\vec{d}_r = (2, -1, 2) \times (3, 2, -1) = (-3, 8, 7).$$

a) Plano paralelo a r

El plano $\pi : x + y + az = 3$ tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (1, 1, a)$. Para que una recta sea paralela a un plano, su vector director debe ser perpendicular al normal. Imponemos

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-3, 8, 7) \cdot (1, 1, a) = -3 + 8 + 7a = 0,$$

de donde $a = -\frac{5}{7}$. **Conclusión.** El plano es paralelo a r cuando $a = -\frac{5}{7}$.

b) Plano por $(5, 4, 7)$ perpendicular a r

Un plano perpendicular a una recta tiene como vector normal un vector director de esa recta. Tomamos $\vec{n} = (-3, 8, 7)$ y usamos la ecuación punto-normal del plano:

$$-3(x - 5) + 8(y - 4) + 7(z - 7) = 0.$$

Al desarrollar:

$$-3x + 8y + 7z - 66 = 0.$$

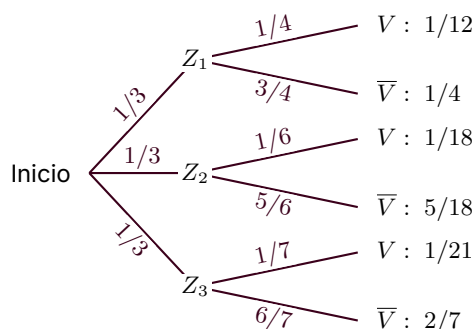
Conclusión. Una ecuación general del plano es $-3x + 8y + 7z - 66 = 0$.

Opción B. Ejercicio 4. Probabilidad total y Bayes

Se elige cada una de las tres zonas con probabilidad $1/3$. Llamamos V al suceso "el pulsador activado es verde". Como hay un pulsador verde en cada zona,

$$P(V | Z_1) = \frac{1}{4}, \quad P(V | Z_2) = \frac{1}{6}, \quad P(V | Z_3) = \frac{1}{7}.$$

En cada camino del árbol multiplicamos las probabilidades de sus ramas para hallar la probabilidad conjunta; después sumaremos los casos disjuntos que terminan en verde.



a) Probabilidad de que el pulsador sea verde

Los tres caminos que terminan en V son incompatibles entre sí, así que sumamos sus probabilidades conjuntas:

$$P(V) = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} = \frac{21 + 14 + 12}{252} = \frac{47}{252}.$$

Conclusión. La probabilidad de activar el pulsador verde es $\frac{47}{252}$.

b) Probabilidad de que sea de la zona 1 sabiendo que es verde

Aplicamos la fórmula de Bayes, pues conocemos que ha ocurrido V y queremos invertir la condición:

$$P(Z_1 | V) = \frac{P(Z_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{1/12}{47/252} = \frac{21}{47}.$$

Conclusión. Sabiendo que el pulsador es verde, la probabilidad de que proceda de la zona 1 es $\frac{21}{47}$.