

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Usamos los desarrollos de Taylor en $x = 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Por tanto, el numerador se comporta como

$$x \cos x + b \sin x = (1 + b)x - \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{6}\right)x^3 + o(x^3).$$

Como el denominador es x^3 , para que el límite sea finito debe anularse el término de primer grado: $1 + b = 0$, luego $b = -1$. Con este valor, el coeficiente de x^3 es $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$. Así,

$$\boxed{b = -1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + b \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

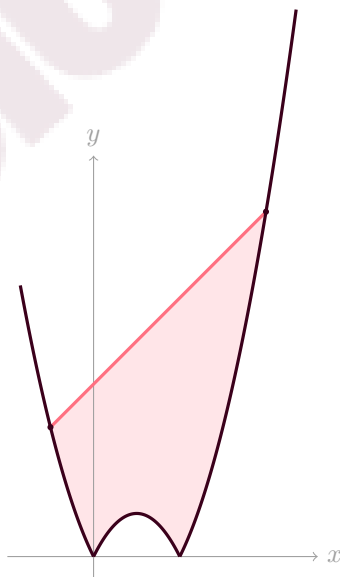
Opción A - Ejercicio 2

La función $f(x) = |x(x - 2)|$ cambia de expresión cuando $x(x - 2)$ cambia de signo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \text{ o } x \geq 2, \\ -x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Para hallar los cortes con $g(x) = x + 4$, igualamos en los intervalos correspondientes. En las zonas exteriores resulta $x^2 - 2x = x + 4$, es decir $(x - 4)(x + 1) = 0$; ambas raíces pertenecen a esas zonas. En $[0, 2]$, la ecuación $-x^2 + 2x = x + 4$ no tiene raíces reales. Los puntos de corte son $(-1, 3)$ y $(4, 8)$.

Entre esos puntos la recta queda por encima de f . El esbozo muestra el recinto, separado en los intervalos donde cambia la expresión de f :



El área geométrica es la suma de las integrales de la diferencia $g - f$ en cada tramo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^0 (-x^2 + 3x + 4) dx + \int_0^2 (x^2 - x + 4) dx + \int_2^4 (-x^2 + 3x + 4) dx \\ &= \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \boxed{\frac{109}{6}}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

Los vectores fila son linealmente independientes exactamente cuando el determinante de M es distinto de cero:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}, \quad \det M = m(m+1).$$

Así, son independientes si $m \neq 0, -1$. En esos casos, $\text{rg}(M) = 3$. Para $m = 0$, la tercera fila es la suma de las dos primeras y las dos primeras son independientes, luego el rango es 2. Para $m = -1$, la segunda fila es nula y las otras dos son independientes, así que el rango también es 2.

Cuando $m = 1$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo $M(u, v, w)^t = (p, q, r)^t$, se obtiene $u = r - \frac{q}{2}$, $v = \frac{q}{2}$ y $w = r - \frac{q}{2} - p$. Por tanto,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta s es la intersección de dos planos con normales $\vec{n}_1 = (-2, 1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (-a, 0, 1)$. Por eso, un vector director de s es

$$\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, a).$$

La recta r tiene vector director $\vec{v}_r = (a, 2a, 1)$. Para que sean paralelas, estos vectores deben ser proporcionales. Comparando las componentes primera y tercera, el factor de proporcionalidad es a y debe cumplirse $1 = a^2$. Luego

$$a = 1 \text{ o } a = -1.$$

Para $a = 1$, las dos ecuaciones que definen s son $-2x + y = -2$ y $-x + z = 0$. Un punto de s es $Q = (0, -2, 0)$ y un vector director común es $\vec{v} = (1, 2, 1)$. Tomamos $P = (1, 0, 0)$ en r . La distancia entre estas rectas paralelas es

$$d(r, s) = \frac{\|(Q - P) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Como $(Q - P) \times \vec{v} = (-2, 1, 0)$, resulta

$$d(r, s) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para que la función sea derivable en todo su dominio, en el punto de unión $x = 0$ deben coincidir los valores y las derivadas laterales. La rama izquierda da $f(0) = 2$, así que la continuidad exige

$$a\sqrt{b} = 2.$$

La derivada de la rama izquierda es $1 - 2e^{-x}$ y vale -1 en 0 . La derivada de la rama derecha es $-a/(2\sqrt{b-x})$, por lo que la igualdad de derivadas laterales requiere

$$-\frac{a}{2\sqrt{b}} = -1 \implies a = 2\sqrt{b}.$$

Combinando con $a\sqrt{b} = 2$ obtenemos $2b = 2$, es decir $b = 1$ y $a = 2$. La raíz está definida para $0 < x < 1$ con estos valores. Así,

$$a = 2, \quad b = 1.$$

En $x = 0$ el punto es $(0, 2)$ y la pendiente común es -1 . La recta tangente y su perpendicular son

$$\text{Tangente: } y = 2 - x, \quad \text{Normal: } y = x + 2.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos $g(x) = \ln(1 + x^2)$ por partes, tomando $u = \ln(1 + x^2)$ y $dv = dx$. Así, $du = \frac{2x}{1 + x^2} dx$ y $v = x$:

$$\begin{aligned} \int \ln(1 + x^2) dx &= x \ln(1 + x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx \\ &= x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x + C. \end{aligned}$$

La primitiva pasa por el origen, de modo que $F(0) = 0$ y $C = 0$. Por tanto,

$$F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x.$$

Opción B - Ejercicio 3

Multiplicamos A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Entonces $A(A/2) = I$, por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De $A^2 = 2I$ se obtiene el ciclo $A^{2k} = 2^k I$ y $A^{2k+1} = 2^k A$. Como $2013 = 2 \cdot 1006 + 1$,

$$A^{2013} = 2^{1006} A.$$

La inversa correspondiente es

$$(A^{2013})^{-1} = 2^{-1006} A^{-1} = 2^{-1007} A.$$

Opción B - Ejercicio 4

Si P y Q son simétricos respecto de un plano, ese plano es perpendicular al segmento PQ y pasa por su punto medio. El punto medio es

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (1, 2, 1),$$

y un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, -2, 0)$, que podemos simplificar a $(1, 1, 0)$. Usando el punto M , la ecuación general del plano es

$$\pi : x + y - 3 = 0.$$

La distancia de $P(2, 3, 1)$ a este plano se calcula con

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$