MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II · 2.º BACHILLERATO · LOMLOE

# Programación lineal

30 ejercicios de elaboración propia, con problemas tipo PAU · Enunciados y soluciones paso a paso · tuprofealrescate.com

### Cómo usar estos ejercicios

**a)** Están ordenados por tipo y nivel (básico, medio y avanzado); los dos últimos son problemas tipo PAU.

**b)** Primero van todos los enunciados y después, las soluciones paso a paso, con la región factible dibujada.

**c)** En cada problema: define las variables, escribe las restricciones y la función objetivo, dibuja la región y calcula sus vértices.

**d)** Si la región no es acotada, comprueba si la función objetivo alcanza el óptimo antes de dar la respuesta.

## Inecuaciones lineales con dos incógnitas y semiplanos

### Ejercicio 1 · Representar un semiplano

Básico

Representa gráficamente la solución de cada inecuación:

a) $2x + y \leq 6$ b) $x - 3y > 3$ c) $y \geq 2x$

### Ejercicio 2 · Comprobar si un punto es solución

Básico

Indica cuáles de los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(0, 5)$ y $D(2, -1)$ son solución del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

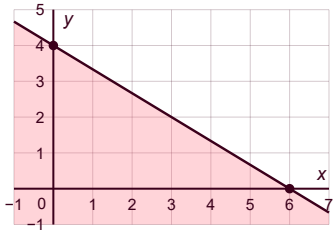
### Ejercicio 3 · Inecuación a partir de su gráfica

Medio

En la figura, la zona sombreada es la solución de una inecuación lineal (la recta está incluida).

a) Escribe esa inecuación.

b) ¿Es solución el punto $(3, 2)$? ¿Y el $(5, 1)$?




### Ejercicio 4 · Traducir enunciados a inecuaciones

Medio

Una empresa fabrica $x$ unidades del producto A e $y$ unidades del producto B. Escribe cada condición como una inecuación:

a) Entre los dos productos no se pueden fabricar más de $120$ unidades.

b) Del producto A se fabrica al menos el doble que del B.

c) Cada unidad de A necesita $3$ horas y cada unidad de B, $2$ horas, y hay como máximo $300$ horas.

d) La diferencia entre las unidades de A y las de B no puede superar $30$.

e) Las unidades de B son, como mucho, el $40\ \%$ del total fabricado.

Tu Profe al Rescate

## Región factible y vértices

### Ejercicio 5 · Región factible acotada y sus vértices

Básico

Representa la región definida por el sistema siguiente y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

### Ejercicio 6 · Vértices por intersección de rectas

Básico

Representa la región factible y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \end{cases}$$

### Ejercicio 7 · Región factible no acotada

Medio

Representa la región definida por el sistema siguiente, indica si es acotada y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

### Ejercicio 8 · Región con restricciones del tipo x ≥ y

Medio

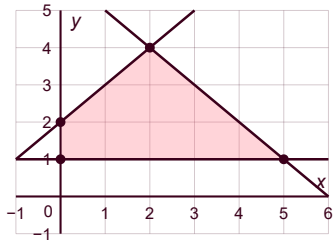
Representa la región factible y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ x \leq 6,\ y \geq 1 \end{cases}$$

### Ejercicio 9 · Sistema de inecuaciones de una región dada

Medio

Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es la región sombreada de la figura (los bordes están incluidos) y calcula sus vértices.




### Ejercicio 10 · Región vacía y región de un solo punto

Avanzado

Estudia la región factible de cada sistema:

a) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ 2x + y \geq 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

Tu Profe al Rescate

## Función objetivo y método de los vértices

### Ejercicio 11 · Método de los vértices

Básico

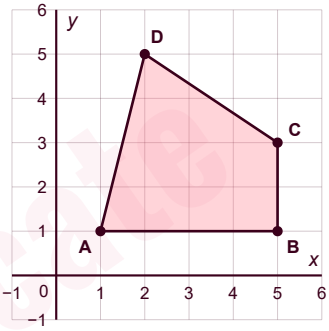
Calcula el máximo y el mínimo de $F(x, y) = 3x + 2y$ en la región

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \end{cases}$$

### Ejercicio 12 · Máximo y mínimo en una región dada

Básico

La región factible de la figura tiene vértices $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 3)$ y $D(2, 5)$.




a) Halla el máximo y el mínimo de $F(x, y) = x + 3y$ en esa región.

b) Haz lo mismo con $G(x, y) = 2x - y$.

### Ejercicio 13 · Mínimo en una región no acotada

Medio

En la región

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

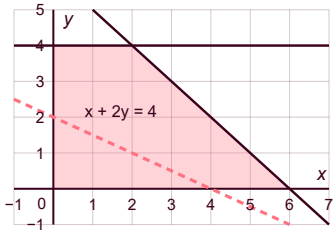
a) Halla el mínimo de $F(x, y) = 2x + 3y$.

b) ¿Tiene $F$ máximo en esa región? Razona la respuesta.

### Ejercicio 14 · Método de las rectas de nivel

Medio

En la figura está la región




$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

y, en discontinua, la recta de nivel $x + 2y = 4$.

Usa las rectas de nivel para hallar el máximo de $F(x, y) = x + 2y$ y compruébalo con el método de los vértices.

Tu Profe al Rescate

## Ejercicio 15 · Región con cinco vértices

Avanzado

Halla el máximo y el mínimo de $F(x,y)=5x+4y$ en la región

$$\begin{cases} x\geq 0,\ x\leq 4 \\ y\leq 5 \\ x+y\geq 2 \\ x-y\leq 2 \end{cases}$$

# Soluciones múltiples y casos sin solución

## Ejercicio 16 · Máximo con infinitas soluciones

Medio

Halla el máximo de $F(x,y)=2x+4y$ en la región

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ x+2y\leq 8 \\ 3x+y\leq 9 \end{cases}$$

e indica en qué puntos se alcanza.

## Ejercicio 17 · Mínimo múltiple en una región no acotada

Medio

Estudia el mínimo y el máximo de $F(x,y)=x+y$ en la región

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ x+y\geq 4 \\ x+3y\geq 6 \end{cases}$$

## Ejercicio 18 · Problemas sin solución óptima

Medio

a) Estudia si $F(x,y)=x+y$ tiene máximo y mínimo en la región

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ x-y\leq 2 \\ -x+y\leq 3 \end{cases}$$

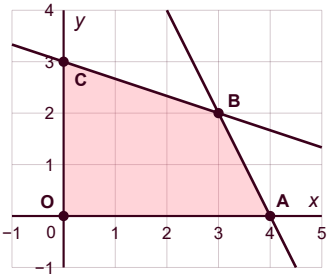
b) Explica por qué el problema «maximizar $F(x,y)=x+2y$ con $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 3$, $2x+3y\geq 12$» no tiene solución.

## Ejercicio 19 · Función objetivo con un parámetro

Avanzado

La figura muestra la región

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 8 \\ x+3y\leq 9 \end{cases}$$




de vértices $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(3,2)$ y $C(0,3)$. Sea $F(x,y)=ax+y$ con $a>0$.

a) Halla $a$ para que el máximo de $F$ se alcance en infinitos puntos.

b) ¿Para qué valores de $a$ el máximo se alcanza solo en $B$?

Tu Profe al Rescate

## Planteamiento de problemas

### Ejercicio 20 · Plantear un problema de producción

Medio

Una carpintería fabrica mesas y sillas. Cada mesa necesita $4$ horas de trabajo y $3$ m² de madera, y cada silla, $2$ horas y $1$ m². Cada semana dispone de $120$ horas y $75$ m² de madera, y debe fabricar al menos el doble de sillas que de mesas. Gana $60$ € por mesa y $25$ € por silla.

a) Plantea el problema de programación lineal (no lo resuelvas).

b) ¿Es factible fabricar $10$ mesas y $30$ sillas? ¿Qué beneficio daría?

### Ejercicio 21 · Plantear un problema de coste mínimo

Medio

Un colegio organiza una excursión para al menos $400$ personas. La empresa de autobuses tiene $8$ autobuses de $50$ plazas y $10$ de $30$ plazas, pero solo $12$ conductores. Alquilar un autobús grande cuesta $600$ € y uno pequeño, $400$ €.

a) Plantea el problema para que el coste sea mínimo (no lo resuelvas).

b) ¿Es una solución factible alquilar $5$ autobuses de cada tipo? ¿Cuánto costaría?

## Problemas de producción

### Ejercicio 22 · Problema de producción: máximo beneficio

Medio

Un taller fabrica camisetas y sudaderas. Cada camiseta necesita $1$ hora de costura y $1$ de estampado, y cada sudadera, $2$ horas de costura y $1$ de estampado. Cada semana dispone como máximo de $80$ horas de costura y $50$ de estampado. Gana $8$ € por camiseta y $12$ € por sudadera. ¿Cuántas debe fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

### Ejercicio 23 · Problema de producción con mínimos

Medio

Una empresa fabrica patinetes urbanos y deportivos. Por la capacidad de la cadena, no puede fabricar más de $100$ al día en total. Debe fabricar al menos $20$ deportivos, y el número de urbanos tiene que ser como mínimo igual al de deportivos. Cada urbano deja un beneficio de $30$ € y cada deportivo, de $50$ €. ¿Cuántos de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio?

### Ejercicio 24 · Problema de producción con tres recursos

Avanzado

Una fábrica de muebles produce armarios y estanterías. Cada armario necesita $3$ h de corte, $2$ h de montaje y $1$ h de barnizado; cada estantería, $1$ h de corte, $2$ h de montaje y $2$ h de barnizado. Cada semana dispone como máximo de $90$ h de corte, $80$ h de montaje y $70$ h de barnizado. El beneficio es de $120$ € por armario y $50$ € por estantería.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio?

b) En la solución óptima, ¿sobran horas de algún recurso?

Tu Profe al Rescate

## Problemas de dietas y mezclas

### Ejercicio 25 · Problema de dieta: coste mínimo

Medio

Un deportista completa su alimentación con dos preparados, A y B. Cada sobre de A aporta $2$ unidades de proteínas y $1$ de vitaminas, y cada sobre de B, $1$ unidad de proteínas y $2$ de vitaminas. Necesita al menos $10$ unidades de proteínas y $8$ de vitaminas al día. Un sobre de A cuesta $0{,}80$ € y uno de B, $0{,}60$ €. ¿Cuántos sobres de cada preparado debe tomar para que el coste sea mínimo?

### Ejercicio 26 · Mezcla de piensos con tres nutrientes

Avanzado

Un ganadero prepara la ración diaria con dos piensos, P y Q. Cada kilo de P contiene $4$ unidades de proteína, $2$ de grasa y $1$ de fibra; cada kilo de Q, $1$ de proteína, $2$ de grasa y $3$ de fibra. La ración debe tener al menos $8$ unidades de proteína, $10$ de grasa y $6$ de fibra. El kilo de P cuesta $0{,}50$ € y el de Q, $0{,}40$ €. ¿Cuántos kilos de cada pienso debe usar para que el coste sea mínimo?

## Problemas de transporte y de inversiones

### Ejercicio 27 · Problema de transporte

Avanzado

Dos almacenes, A y B, tienen $60$ y $50$ toneladas de fruta, respectivamente. Hay que llevar $40$ t a la tienda T1 y $50$ t a la tienda T2. El transporte de cada tonelada cuesta: de A a T1, $40$ €; de A a T2, $30$ €; de B a T1, $50$ €; de B a T2, $60$ €. ¿Cómo hay que organizar el reparto para que el coste sea mínimo?

### Ejercicio 28 · Problema de inversiones

Medio

Una persona quiere invertir como máximo $30\,000$ € en dos productos: un fondo A, con una rentabilidad anual del $4\ \%$, y un fondo B, del $6\ \%$. Quiere invertir al menos $6000$ € en A, no más de $18\,000$ € en B y, en B, como mucho el doble que en A. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para que el beneficio anual sea máximo?

## Problemas tipo PAU

### Ejercicio 29 · Tipo PAU: cultivo de trigo y cebada

Avanzado

Un agricultor tiene $10$ hectáreas para sembrar trigo y cebada. Cada hectárea de trigo necesita $4$ jornadas de trabajo y cada hectárea de cebada, $2$, y dispone de $32$ jornadas. Por normativa, la superficie de cebada no puede superar en más de $4$ ha a la de trigo. El beneficio es de $500$ € por hectárea de trigo y $300$ € por hectárea de cebada.

a) Plantea el problema y representa la región factible.

b) ¿Cuántas hectáreas de cada cereal debe sembrar para maximizar el beneficio?

c) Si el beneficio de la cebada subiera a $500$ €/ha, ¿cuál sería la solución?

Tu Profe al Rescate

## Ejercicio 30 · Tipo PAU: menús de un catering

Avanzado

Un catering prepara menús normales y vegetarianos para un congreso. Debe preparar entre $60$ y $150$ menús en total; al menos $20$ tienen que ser vegetarianos, y no puede haber más vegetarianos que normales. Preparar un menú normal cuesta $9$ € y uno vegetariano, $7$ €.

**a)** ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar para que el coste sea mínimo?

**b)** Si vende cada menú normal a $15$ € y cada vegetariano a $12$ €, ¿cuántos de cada tipo le conviene preparar para que el beneficio sea máximo?

Tu Profe al Rescate

# Soluciones

Resolución paso a paso de los 30 ejercicios

## Inecuaciones lineales con dos incógnitas y semiplanos

### Ejercicio 1 · Representar un semiplano

Básico

Dibujamos la recta frontera (continua si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, discontinua si es $<$ o $>$) y probamos con un punto que no esté en ella. Si lo cumple, la solución es el semiplano que lo contiene; si no, el otro.

**a)** Recta $2x + y = 6$: pasa por $(0, 6)$ y $(3, 0)$. Probamos con $(0, 0)$: $0 \leq 6$, se cumple. La solución es el semiplano que contiene al origen (por debajo de la recta), con la recta incluida.

**b)** Recta $x - 3y = 3$: pasa por $(0, -1)$ y $(3, 0)$. Con $(0, 0)$: $0 > 3$ es falso. La solución es el semiplano que no contiene al origen (por debajo de la recta), y la recta se dibuja discontinua porque no está incluida.

**c)** La recta $y = 2x$ pasa por el origen, así que probamos con otro punto, por ejemplo $(1, 0)$: $0 \geq 2$ es falso. La solución es el semiplano que no contiene a $(1, 0)$, es decir, el que queda por encima de la recta, con la recta incluida.

**Resultado:** a) Bajo $2x + y = 6$, con el origen y la recta  b) Bajo $x - 3y = 3$, sin la recta  c) Sobre $y = 2x$, con la recta

### Ejercicio 2 · Comprobar si un punto es solución

Básico

Un punto es solución del sistema si cumple **todas** las inecuaciones a la vez. Sustituimos sus coordenadas en cada una.

$A(1, 2)$: $1 + 2 = 3 \leq 4$; $1 - 2 = -1 \geq -2$; $2 \geq 0$. Cumple las tres.

$B(3, 1)$: $3 + 1 = 4 \leq 4$; $3 - 1 = 2 \geq -2$; $1 \geq 0$. Cumple las tres (está en el borde $x + y = 4$).

$C(0, 5)$: $0 + 5 = 5 \leq 4$ es falso. No es solución.

$D(2, -1)$: cumple las dos primeras, pero $-1 \geq 0$ es falso. No es solución.

**Resultado:** Son solución $A$ y $B$ ($B$ está en el borde); $C$ y $D$ no

### Ejercicio 3 · Inecuación a partir de su gráfica

Medio

Primero hallamos la ecuación de la recta frontera y después vemos qué desigualdad cumple un punto de la zona sombreada.

**a)** La recta corta a los ejes en $(6, 0)$ y $(0, 4)$. Su ecuación es

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 12$$

El origen está en la zona sombreada y cumple $0 < 12$. Como la recta está incluida, la inecuación es $2x + 3y \leq 12$.

**b)** Con $(3, 2)$: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \leq 12$. Sí es solución (está sobre la recta).

Con $(5, 1)$: $2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \leq 12$ es falso. No es solución.

**Resultado:** a) $2x + 3y \leq 12$  b) $(3, 2)$ sí (en el borde); $(5, 1)$ no

## Ejercicio 4 · Traducir enunciados a inecuaciones

Medio

Traducimos cada expresión: «no más de» y «como máximo» son $\leq$; «al menos» y «como mínimo» son $\geq$.

**a)** $x + y \leq 120$

**b)** $x \geq 2y$, o bien $x - 2y \geq 0$

**c)** $3x + 2y \leq 300$

**d)** $x - y \leq 30$

**e)** $y \leq 0{,}4(x + y) \Rightarrow y \leq 0{,}4x + 0{,}4y \Rightarrow 0{,}6y \leq 0{,}4x \Rightarrow 3y \leq 2x$, es decir, $2x - 3y \geq 0$

Además, en un problema de este tipo siempre se añaden $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

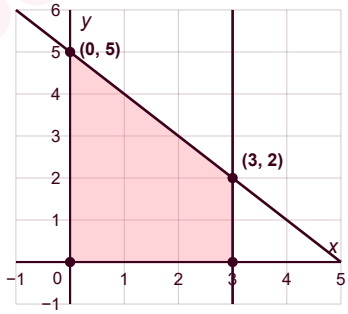
**Resultado:** a) $x + y \leq 120$ b) $x - 2y \geq 0$ c) $3x + 2y \leq 300$ d) $x - y \leq 30$ e) $2x - 3y \geq 0$

## Región factible y vértices

## Ejercicio 5 · Región factible acotada y sus vértices

Básico

La región factible es la intersección de los semiplanos. Los vértices son los puntos de corte de las rectas frontera que cumplen todas las inecuaciones.




$x \geq 0$, $y \geq 0$: primer cuadrante. $x + y \leq 5$: por debajo de la recta que pasa por $(5, 0)$ y $(0, 5)$. $x \leq 3$: a la izquierda de la recta vertical $x = 3$.

Vértices:

$x = 0$ e $y = 0$: $(0, 0)$.

$y = 0$ y $x = 3$: $(3, 0)$.

$x = 3$ y $x + y = 5$: $y = 2$, es decir, $(3, 2)$.

$x + y = 5$ y $x = 0$: $(0, 5)$.

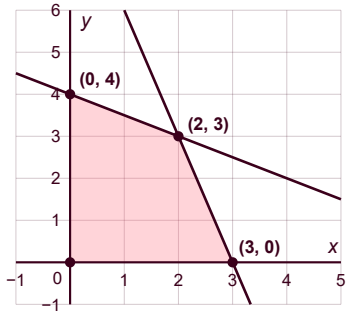
La región es un cuadrilátero cerrado, así que es acotada.

**Resultado:** Región acotada (cuadrilátero) con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ y $(0, 5)$

## Ejercicio 6 · Vértices por intersección de rectas

Básico

Dibujamos cada recta con sus cortes con los ejes. $x + 2y = 8$ pasa por $(8, 0)$ y $(0, 4)$; $3x + y = 9$ pasa por $(3, 0)$ y $(0, 9)$. El origen cumple las dos inecuaciones, así que la región está del lado del origen.




Los vértices sobre los ejes son $(0, 0)$, $(3, 0)$ (corte de $3x + y = 9$ con $y = 0$) y $(0, 4)$ (corte de $x + 2y = 8$ con $x = 0$).

El cuarto vértice es el corte de las dos rectas:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

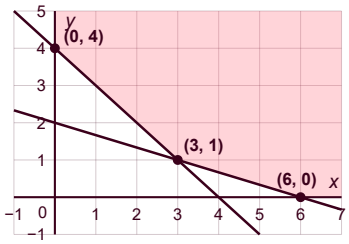
De la segunda, $y = 9 - 3x$. Sustituimos: $x + 18 - 6x = 8 \Rightarrow x = 2$, y entonces $y = 3$.

Comprobación: $2 + 6 = 8$ y $6 + 3 = 9$.

**Resultado:** Vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 3)$ y $(0, 4)$

## Ejercicio 7 · Región factible no acotada

Medio




Con $\geq$, el origen no cumple ni $x + y \geq 4$ ni $x + 3y \geq 6$: la región está al otro lado de las dos rectas, «hacia fuera».

$x + y = 4$ pasa por $(4, 0)$ y $(0, 4)$; $x + 3y = 6$ pasa por $(6, 0)$ y $(0, 2)$.

Corte de las dos rectas: restando, $(x + 3y) - (x + y) = 6 - 4 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$, y $x = 3$.

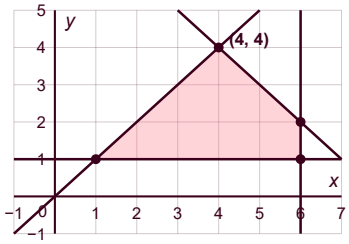
Sobre el eje $Y$ manda la recta más alta: $(0, 4)$. Sobre el eje $X$ manda la más alejada: $(6, 0)$.

La región se extiende sin límite hacia arriba y hacia la derecha, así que no es acotada.

**Resultado:** Región no acotada con vértices $(0, 4)$, $(3, 1)$ y $(6, 0)$

## Ejercicio 8 · Región con restricciones del tipo x ≥ y

Medio




$x - y \geq 0$ equivale a $y \leq x$: por debajo de la recta $y = x$ (el punto $(1, 0)$ la cumple). Las otras tres son la zona bajo $x + y = 8$, a la izquierda de $x = 6$ y por encima de $y = 1$.

Vértices:

$y = 1$ e $y = x$: $(1, 1)$.

$y = 1$ y $x = 6$: $(6, 1)$.

$x = 6$ y $x + y = 8$: $(6, 2)$.

$x + y = 8$ e $y = x$: $2x = 8 \Rightarrow (4, 4)$.

Descartamos los cortes que no cumplen todas las inecuaciones: por ejemplo, $y = 1$ con $x + y = 8$ da $(7, 1)$, pero $7 \leq 6$ es falso.

**Resultado:** Vértices $(1, 1)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$ y $(4, 4)$

## Ejercicio 9 · Sistema de inecuaciones de una región dada

Medio

Hallamos la recta de cada lado y elegimos el sentido de la desigualdad con un punto interior, por ejemplo $(1, 2)$.

Lado izquierdo: el eje $Y$, $x = 0$. La región está a la derecha: $x \geq 0$.

Lado inferior: la recta horizontal $y = 1$. La región está por encima: $y \geq 1$.

Lado que pasa por $(0, 2)$ y $(2, 4)$: pendiente $1$, recta $y = x + 2$, o sea, $-x + y = 2$. Con $(1, 2)$: $-1 + 2 = 1 \leq 2$, así que $-x + y \leq 2$.

Lado que pasa por $(2, 4)$ y $(5, 1)$: pendiente $-1$, recta $x + y = 6$. Con $(1, 2)$: $3 \leq 6$, así que $x + y \leq 6$.

Los vértices son los cortes de lados consecutivos: $(0,1)$, $(5,1)$, $(2,4)$ y $(0,2)$.

**Resultado:** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ -x+y \leq 2 \\ x+y \leq 6 \end{cases}$ Vértices $(0,1)$, $(5,1)$, $(2,4)$ y $(0,2)$

## Ejercicio 10 · Región vacía y región de un solo punto

Avanzado

No siempre hay región factible. Para verlo, buscamos los puntos de la zona $x+2y \leq 4$ (con $x, y \geq 0$) que más hacen crecer $2x+y$.

La zona $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+2y \leq 4$ es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,2)$. En esos vértices, $2x+y$ vale $0$, $8$ y $2$, así que dentro del triángulo $2x+y \leq 8$, y solo vale $8$ en $(4,0)$.

a) Se pide $2x+y \geq 10$, pero en el triángulo como mucho vale $8$. Ningún punto cumple todas las condiciones: la región factible es vacía.

b) Se pide $2x+y \geq 8$, y eso solo ocurre en $(4,0)$. Comprobación: $4+0=4 \leq 4$ y $8+0=8 \geq 8$. La región factible se reduce a ese único punto.

**Resultado:** a) Región vacía: el sistema no tiene solución b) La región es un único punto, $(4,0)$

# Función objetivo y método de los vértices

## Ejercicio 11 · Método de los vértices

Básico

Si la región factible es acotada, el máximo y el mínimo de una función lineal se alcanzan en vértices. Basta con evaluar $F$ en cada vértice.

Los vértices de esta región (ejercicio 6) son $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,3)$ y $(0,4)$.

$F(0,0)=0$

$F(3,0)=9$

$F(2,3)=6+6=12$

$F(0,4)=8$

**Resultado:** Máximo $12$ en $(2,3)$; mínimo $0$ en $(0,0)$

## Ejercicio 12 · Máximo y mínimo en una región dada

Básico

La región es acotada, así que evaluamos cada función en los cuatro vértices.

a) $F(A)=1+3=4$; $F(B)=5+3=8$; $F(C)=5+9=14$; $F(D)=2+15=17$.

b) $G(A)=2-1=1$; $G(B)=10-1=9$; $G(C)=10-3=7$; $G(D)=4-5=-1$.

Fíjate en que la misma región da óptimos en vértices distintos según la función objetivo.

**Resultado:** a) Máximo $17$ en $D(2,5)$; mínimo $4$ en $A(1,1)$ b) Máximo $9$ en $B(5,1)$; mínimo $-1$ en $D(2,5)$

## Ejercicio 13 · Mínimo en una región no acotada

Medio

En una región no acotada hay que comprobar si la función está acotada en la dirección en la que se abre la región.

**a)** Los vértices (ejercicio 7) son $(0,4)$, $(3,1)$ y $(6,0)$:

$F(0,4)=12$; $F(3,1)=6+3=9$; $F(6,0)=12$.

Como $x\geq 0$, $y\geq 0$ y los coeficientes de $F$ son positivos, $F$ no puede bajar de cierto valor en la región, y entonces su mínimo se alcanza en un vértice: el mínimo es $9$ en $(3,1)$.

**b)** No. La región contiene puntos como $(k,0)$ con $k\geq 6$ tan grande como queramos, y $F(k,0)=2k$ crece sin límite.

**Resultado:** a) Mínimo $9$ en $(3,1)$ b) No tiene máximo: la región no está acotada y $F$ crece sin límite

## Ejercicio 14 · Método de las rectas de nivel

Medio

Las rectas de nivel $x+2y=k$ son todas paralelas a la recta dibujada, $x+2y=4$. Al desplazarlas hacia arriba, $k$ aumenta: el máximo está en el último punto de la región que toca la recta antes de salir.

Desplazando la recta paralela a sí misma, el último punto que toca es el vértice en el que se cortan $y=4$ y $x+y=6$, es decir, $(2,4)$.

Comprobación con los vértices $(0,0)$, $(6,0)$, $(2,4)$ y $(0,4)$:

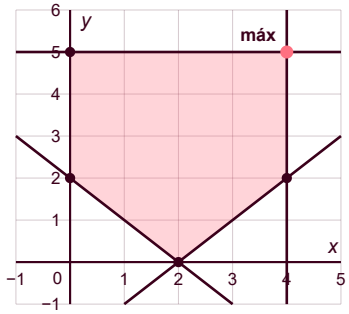
$F(0,0)=0$; $F(6,0)=6$; $F(2,4)=2+8=10$; $F(0,4)=8$.

**Resultado:** Máximo $10$ en $(2,4)$

## Ejercicio 15 · Región con cinco vértices

Avanzado

Con cinco restricciones hay muchos cortes posibles. Calculamos solo los de rectas que forman lados de la región y descartamos los que no cumplen todas las inecuaciones.




$x=0$ y $x+y=2$: $(0,2)$.

$x+y=2$ y $x-y=2$: sumando, $2x=4\Rightarrow(2,0)$.

$x-y=2$ y $x=4$: $(4,2)$.

$x=4$ e $y=5$: $(4,5)$.

$y=5$ y $x=0$: $(0,5)$.

Un corte que no vale: $y=5$ con $x+y=2$ da $(-3,5)$, que no cumple $x\geq 0$.

Evaluamos: $F(0,2)=8$; $F(2,0)=10$; $F(4,2)=28$; $F(4,5)=40$; $F(0,5)=20$.

**Resultado:** Máximo $40$ en $(4,5)$; mínimo $8$ en $(0,2)$

## Soluciones múltiples y casos sin solución

## Ejercicio 16 · Máximo con infinitas soluciones

Medio

Si dos vértices consecutivos dan el mismo valor óptimo, la función alcanza ese valor en todo el lado que los une: hay infinitas soluciones.

Vértices (ejercicio 6): $F(0,0)=0$; $F(3,0)=6$; $F(2,3)=4+12=16$; $F(0,4)=16$.

El máximo, $16$, se alcanza en $(2,3)$ y en $(0,4)$, y por tanto en todo el segmento que los une. Ocurre porque $2x+4y=2(x+2y)$: las rectas de nivel son paralelas al lado $x+2y=8$.

Los puntos del segmento son $\left(x, \dfrac{8-x}{2}\right)$ con $0 \leq x \leq 2$.

**Resultado:** Máximo $16$ en todos los puntos del segmento de extremos $(2,3)$ y $(0,4)$

## Ejercicio 17 · Mínimo múltiple en una región no acotada

Medio

Evaluamos en los vértices (ejercicio 7) y después estudiamos lo que ocurre al alejarnos, porque la región no es acotada.

$F(0,4) = 4$; $F(3,1) = 4$; $F(6,0) = 6$.

En toda la región se cumple $x + y \geq 4$, así que $F$ no puede bajar de $4$. El mínimo es $4$ y se alcanza en todo el segmento de extremos $(0,4)$ y $(3,1)$, que está sobre la recta $x + y = 4$.

Máximo no hay: los puntos $(k,0)$ con $k \geq 6$ son factibles y $F(k,0) = k$ crece sin límite.

**Resultado:** Mínimo $4$ en todo el segmento de extremos $(0,4)$ y $(3,1)$; no tiene máximo

## Ejercicio 18 · Problemas sin solución óptima

Medio

Un problema de programación lineal puede no tener solución por dos motivos: que la región sea no acotada y la función crezca (o decrezca) sin límite, o que la región sea vacía.

a) Los vértices son $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,3)$, pero la región es una franja entre dos rectas paralelas que se abre hacia arriba y a la derecha. Los puntos $(k,k)$ con $k \geq 0$ son factibles ($k - k = 0 \leq 2$ y $0 \leq 3$) y $F(k,k) = 2k$ crece sin límite: no hay máximo.

Mínimo sí hay: $F$ vale $0$, $2$ y $3$ en los vértices y, como $x, y \geq 0$, nunca baja de $0$. El mínimo es $0$ en $(0,0)$.

b) En el triángulo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$ (vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$), la expresión $2x + 3y$ vale como mucho $3 \cdot 3 = 9$, en $(0,3)$. Nunca llega a $12$, así que la región factible es vacía.

**Resultado:** a) Mínimo $0$ en $(0,0)$; no tiene máximo (región no acotada) b) La región factible es vacía

## Ejercicio 19 · Función objetivo con un parámetro

Avanzado

Evaluamos $F$ en los vértices en función de $a$ y comparamos.

$F(O) = 0$; $F(A) = 4a$; $F(B) = 3a + 2$; $F(C) = 3$.

a) Hay infinitas soluciones si el máximo se alcanza a la vez en dos vértices consecutivos.

En $A$ y $B$: $4a = 3a + 2 \Rightarrow a = 2$. Comprobación: $F(A) = F(B) = 8 > 3 = F(C)$.

En $B$ y $C$: $3a + 2 = 3 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$. Comprobación: $F(B) = F(C) = 3 > \dfrac{4}{3} = F(A)$.

b) $B$ es el único máximo si $3a + 2 > 4a$ y $3a + 2 > 3$, es decir, si $a < 2$ y $a > \dfrac{1}{3}$.

**Resultado:** a) $a = 2$ (segmento $AB$) o $a = \dfrac{1}{3}$ (segmento $BC$) b) Si $\dfrac{1}{3} < a < 2$

## Planteamiento de problemas

### Ejercicio 20 · Plantear un problema de producción

Medio

Para plantear un problema: definimos las variables, escribimos una inecuación por cada limitación y la función objetivo que hay que maximizar o minimizar.

a) $x$ = número de mesas, $y$ = número de sillas.

Horas: $4x + 2y \leq 120$, que simplificada es $2x + y \leq 60$.

Madera: $3x + y \leq 75$.

Sillas: $y \geq 2x$.

Además, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (y enteros).

Función objetivo: maximizar $B(x, y) = 60x + 25y$.

b) Con $(10, 30)$: $20 + 30 = 50 \leq 60$; $30 + 30 = 60 \leq 75$; $30 \geq 20$. Es factible.

Beneficio: $B(10, 30) = 600 + 750 = 1350$ €.

**Resultado:** a) Maximizar $B = 60x + 25y$ con $2x + y \leq 60$, $3x + y \leq 75$, $y \geq 2x$, $x, y \geq 0$ b) Sí es factible; $1350$ €

### Ejercicio 21 · Plantear un problema de coste mínimo

Medio

Las limitaciones son de tres tipos: cuántos autobuses hay de cada clase, cuántos conductores y cuántas plazas hacen falta.

a) $x$ = autobuses grandes, $y$ = autobuses pequeños.

Disponibilidad: $0 \leq x \leq 8$ y $0 \leq y \leq 10$.

Conductores: $x + y \leq 12$.

Plazas: $50x + 30y \geq 400$, que simplificada es $5x + 3y \geq 40$.

Función objetivo: minimizar $C(x, y) = 600x + 400y$.

b) Con $(5, 5)$: $5 \leq 8$; $5 \leq 10$; $10 \leq 12$; $250 + 150 = 400 \geq 400$. Es factible (justo con $400$ plazas).

Coste: $C(5, 5) = 3000 + 2000 = 5000$ €.

**Resultado:** a) Minimizar $C = 600x + 400y$ con $x \leq 8$, $y \leq 10$, $x + y \leq 12$, $5x + 3y \geq 40$, $x, y \geq 0$ b) Sí; $5000$ €

## Problemas de producción

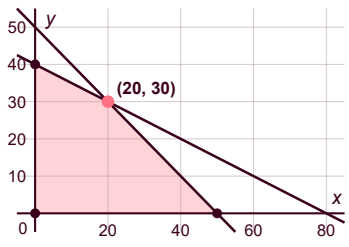
### Ejercicio 22 · Problema de producción: máximo beneficio

Medio

Seguimos los pasos de siempre: variables, restricciones, región factible, vértices y función objetivo.

$x$ = camisetas, $y$ = sudaderas. Maximizar $B(x, y) = 8x + 12y$ con

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



Vértices: $(0,0)$, $(50,0)$, $(0,40)$ y el corte de $x+2y=80$ con $x+y=50$: restando, $y=30$ y $x=20$.
$B(0,0)=0$; $B(50,0)=400$; $B(20,30)=160+360=520$; $B(0,40)=480$.

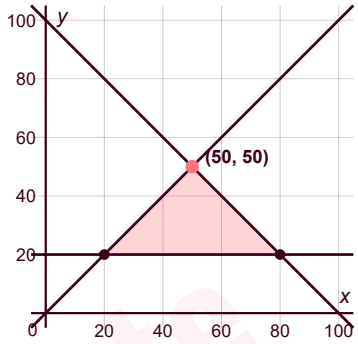
**Resultado:** $20$ camisetas y $30$ sudaderas, con un beneficio de $520$ €

## Ejercicio 23 · Problema de producción con mínimos

Medio

$x$ = urbanos, $y$ = deportivos. Maximizar $B(x,y)=30x+50y$ con

$$\begin{cases} x+y\le 100 \\ y\ge 20 \\ x\ge y \end{cases}$$




($x\ge 0$ ya se cumple, porque $x\ge y\ge 20$.)

Vértices:

$y=20$ y $x=y$: $(20,20)$.

$y=20$ y $x+y=100$: $(80,20)$.

$x=y$ y $x+y=100$: $(50,50)$.

$B(20,20)=600+1000=1600$; $B(80,20)=2400+1000=3400$;
$B(50,50)=1500+2500=4000$.

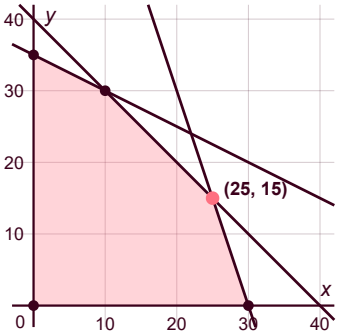
**Resultado:** $50$ urbanos y $50$ deportivos al día, con un beneficio de $4000$ €

## Ejercicio 24 · Problema de producción con tres recursos

Avanzado

$x$ = armarios, $y$ = estanterías. Maximizar $B(x,y)=120x+50y$ con

$$\begin{cases} 3x+y\le 90 \\ 2x+2y\le 80 \\ x+2y\le 70 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$




La segunda se simplifica a $x+y\le 40$.

a) Vértices:

Sobre los ejes: $(0,0)$, $(30,0)$ (por $3x+y=90$) y $(0,35)$ (por $x+2y=70$).

$3x+y=90$ y $x+y=40$: restando, $2x=50\Rightarrow(25,15)$.

$x+y=40$ y $x+2y=70$: restando, $y=30\Rightarrow(10,30)$.

$B(30,0)=3600$; $B(25,15)=3000+750=3750$; $B(10,30)=1200+1500=2700$;
$B(0,35)=1750$; $B(0,0)=0$.

b) Con $(25,15)$: corte $75+15=90$ h y montaje $50+30=80$ h, que se agotan; barnizado $25+30=55$ h de $70$.

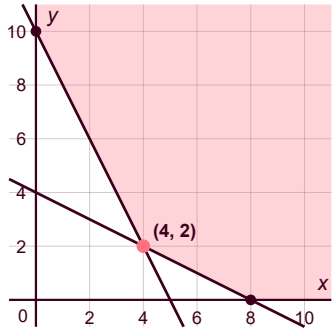
**Resultado:** a) $25$ armarios y $15$ estanterías, con $3750$ € de beneficio b) Sobran $15$ h de barnizado

## Problemas de dietas y mezclas

### Ejercicio 25 · Problema de dieta: coste mínimo

Medio

En los problemas de dietas las restricciones son mínimos ($\geq$) y la función objetivo es un coste que se minimiza. La región no es acotada, pero el mínimo existe porque el coste crece al alejarse del origen.




$x$ = sobres de A, $y$ = sobres de B. Minimizar $C(x, y) = 0{,}8x + 0{,}6y$ con

$$\begin{cases} 2x + y \geq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $(0, 10)$, $(8, 0)$ y el corte de las dos rectas. De la primera, $y = 10 - 2x$: $x + 20 - 4x = 8 \Rightarrow x = 4$, $y = 2$.

$C(0, 10) = 6$; $C(4, 2) = 3{,}2 + 1{,}2 = 4{,}4$; $C(8, 0) = 6{,}4$.

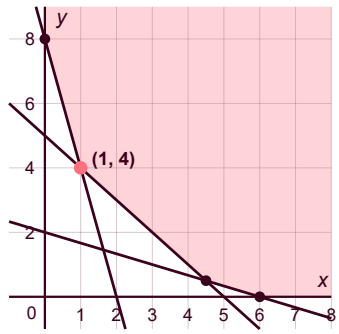
**Resultado:** $4$ sobres de A y $2$ de B, con un coste mínimo de $4{,}40$ € al día

### Ejercicio 26 · Mezcla de piensos con tres nutrientes

Avanzado

$x$ = kg de P, $y$ = kg de Q. Minimizar $C(x, y) = 0{,}5x + 0{,}4y$ con

$$\begin{cases} 4x + y \geq 8 \\ 2x + 2y \geq 10 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$




La de grasa se simplifica a $x + y \geq 5$.

Sobre el eje $Y$ manda la restricción más exigente: $y \geq 8$, punto $(0, 8)$.
Sobre el eje $X$: $x \geq 6$, punto $(6, 0)$.

$4x + y = 8$ y $x + y = 5$: restando, $3x = 3 \Rightarrow (1, 4)$. Cumple $1 + 12 = 13 \geq 6$.

$x + y = 5$ y $x + 3y = 6$: restando, $2y = 1 \Rightarrow (4{,}5;\ 0{,}5)$. Cumple $18 + 0{,}5 \geq 8$.

$C(0, 8) = 3{,}2$; $C(1, 4) = 0{,}5 + 1{,}6 = 2{,}1$; $C(4{,}5;\ 0{,}5) = 2{,}25 + 0{,}2 = 2{,}45$; $C(6, 0) = 3$.

**Resultado:** $1$ kg de P y $4$ kg de Q, con un coste mínimo de $2{,}10$ €

## Problemas de transporte y de inversiones

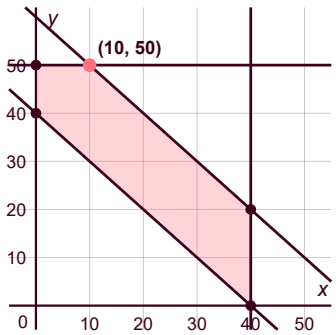
### Ejercicio 27 · Problema de transporte

Avanzado

Con dos variables basta: lo que sale de A. Lo que sale de B es lo que falta para cubrir cada tienda.

$x$ = t de A a T1, $y$ = t de A a T2. Entonces de B a T1 van $40 - x$ y de B a T2, $50 - y$.

Restricciones (ninguna cantidad negativa y no superar lo que hay en cada almacén):




$$\begin{cases} 0 \le x \le 40,\ 0 \le y \le 50 \\ x + y \le 60 \\ (40 - x) + (50 - y) \le 50 \end{cases}$$

La última es $x + y \ge 40$.

Coste:

$C = 40x + 30y + 50(40 - x) + 60(50 - y) = 5000 - 10x - 30y$.

Vértices: $(40, 0)$, $(40, 20)$, $(10, 50)$, $(0, 50)$ y $(0, 40)$.

$C(40, 0) = 4600$; $C(40, 20) = 4000$; $C(10, 50) = 3400$; $C(0, 50) = 3500$; $C(0, 40) = 3800$.

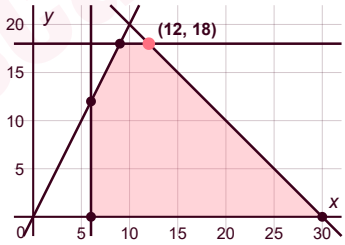
El mínimo está en $(10, 50)$: de A salen $10$ t a T1 y $50$ t a T2; de B, $30$ t a T1 y $0$ t a T2.

**Resultado:** A→T1: $10$ t, A→T2: $50$ t, B→T1: $30$ t, B→T2: $0$ t; coste mínimo $3400$ €

## Ejercicio 28 · Problema de inversiones

Medio

Trabajamos en miles de euros para que los números sean manejables.




$x$ = miles de € en A, $y$ = miles de € en B. Maximizar $R(x, y) = 0{,}04x + 0{,}06y$ con

$$\begin{cases} x + y \le 30 \\ x \ge 6 \\ 0 \le y \le 18 \\ y \le 2x \end{cases}$$

Vértices:

$x = 6$ e $y = 0$: $(6, 0)$. $y = 0$ y $x + y = 30$: $(30, 0)$.

$x + y = 30$ e $y = 18$: $(12, 18)$. $y = 18$ e $y = 2x$: $(9, 18)$. $y = 2x$ y $x = 6$: $(6, 12)$.

$R(6, 0) = 0{,}24$; $R(30, 0) = 1{,}2$; $R(12, 18) = 0{,}48 + 1{,}08 = 1{,}56$; $R(9, 18) = 1{,}44$; $R(6, 12) = 0{,}96$.

El máximo es $1{,}56$ miles de euros, es decir, $1560$ €.

**Resultado:** $12\,000$ € en A y $18\,000$ € en B, con un beneficio de $1560$ € al año

## Problemas tipo PAU

## Ejercicio 29 · Tipo PAU: cultivo de trigo y cebada

Avanzado

a) $x$ = ha de trigo, $y$ = ha de cebada. Maximizar $B(x, y) = 500x + 300y$ con

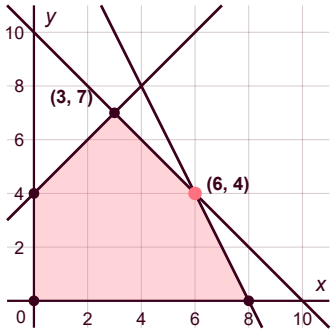
$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 4x + 2y \le 32 \\ y \le x + 4 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

La segunda se simplifica a $2x + y \le 16$.

Vértices: $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 4)$ y los cortes:

$2x + y = 16$ y $x + y = 10$: restando, $x = 6 \Rightarrow (6, 4)$.

$x + y = 10$ e $y = x + 4$: $2x + 4 = 10 \Rightarrow (3, 7)$.




b) $B(0, 0) = 0$; $B(8, 0) = 4000$; $B(6, 4) = 3000 + 1200 = 4200$; $B(3, 7) = 1500 + 2100 = 3600$; $B(0, 4) = 1200$.

c) Ahora $B(x, y) = 500x + 500y$: $B(8, 0) = 4000$; $B(6, 4) = 5000$; $B(3, 7) = 5000$; $B(0, 4) = 2000$.

El máximo se alcanza en dos vértices a la vez: todos los puntos del segmento entre $(6, 4)$ y $(3, 7)$ son óptimos, porque $B = 500(x + y)$ es paralela al lado $x + y = 10$.

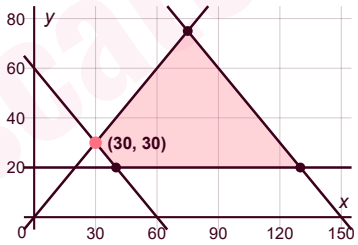
**Resultado:** b) $6$ ha de trigo y $4$ ha de cebada: $4200$ € c) Cualquier punto del segmento de $(6, 4)$ a $(3, 7)$: $5000$ €

## Ejercicio 30 · Tipo PAU: menús de un catering

Avanzado

$x$ = menús normales, $y$ = menús vegetarianos. La región factible es

$$\begin{cases} 60 \leq x + y \leq 150 \\ y \geq 20 \\ y \leq x \end{cases}$$




Vértices:

$y = 20$ y $x + y = 60$: $(40, 20)$.

$y = x$ y $x + y = 60$: $(30, 30)$.

$y = x$ y $x + y = 150$: $(75, 75)$.

$y = 20$ y $x + y = 150$: $(130, 20)$.

a) Coste $C(x, y) = 9x + 7y$: $C(40, 20) = 500$; $C(30, 30) = 480$; $C(75, 75) = 1200$; $C(130, 20) = 1310$.

b) Beneficio por menú: $15 - 9 = 6$ € el normal y $12 - 7 = 5$ € el vegetariano, así que $B(x, y) = 6x + 5y$.

$B(40, 20) = 340$; $B(30, 30) = 330$; $B(75, 75) = 825$; $B(130, 20) = 880$.

**Resultado:** a) $30$ normales y $30$ vegetarianos: coste mínimo $480$ € b) $130$ normales y $20$ vegetarianos: beneficio máximo $880$ €

Tu Profe al Rescate