

SÈRIE 3

1. a) Tenint en compte que la recta r ha de passar pel punt $P = (1,1)$ i que m és el seu pendent, la recta r té per equació $y - 1 = m(x - 1)$. La mida de la base del triangle és l'abscissa del punt d'intersecció de la recta r amb l'eix OX

$$\begin{cases} y - 1 = m(x - 1) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 - 1 = m(x - 1) \rightarrow x = \frac{m - 1}{m}.$$

I l'alçada del triangle és l'ordenada del punt d'intersecció de la recta r amb $y = 3x$:

$$\begin{cases} y - 1 = m(x - 1) \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow 3x - 1 = m(x - 1) \rightarrow x = \frac{m - 1}{m - 3}, \quad y = 3 \cdot \frac{m - 1}{m - 3}.$$

La funció a minimitzar és la que calcula l'àrea del triangle:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot 3 \cdot \frac{m-1}{m-3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}.$$

Parlant estrictament el valor de l'àrea és $A(m) = \left| \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m} \right|$ perquè hi ha valors de m per als quals aquesta expressió és negativa. No tingueu en compte si ignoren aquest detall.

b) Derivem la funció àrea i igulem a zero per trobar els possibles extrems relatius:

$$A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m-2)(m^2-3m) - (m^2-2m+1)(2m-3)}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-m^2-2m+3}{(m^2-3m)^2} = 0,$$

$$-m^2 - 2m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = 1, -3.$$

Per comprovar si són màxims o mínims fem la segona derivada:

$$A''(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-2m-2)(m^2-3m)^2 - (-m^2-2m+3)2(m^2-3m)(2m-3)}{(m^2-3m)^4},$$

i, com que $A''(-3) = \frac{1}{54} > 0$ i $A''(1) = -\frac{3}{2} < 0$, el mínim correspon a $m = -3$ (segons l'esbós, el pendent ja ha de ser negatiu).

Alternativament, podem estudiar el creixement i decreixement de la funció $A(m)$. Aquests venen donats pel signe de la primera derivada, però com que aquesta té un quadrat al denominador, dependrà només del signe del numerador $-m^2 - 2m + 3$. Això és una paràbola oberta cap avall i que talla l'eix OX en els punts $(-3,0)$ i $(1,0)$; així doncs, per a $m < -3$, la derivada és negativa i la funció decreix, i per $-3 < m < 1$, la derivada



és positiva i la funció creix, per la qual cosa en $m = -3$, l'àrea és mínima. El valor d'aquesta àrea és:

$$A(-3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 1}{(-3)^2 - 3(-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{18} = \frac{4}{3} u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per l'equació del feix de rectes; 0,25 per la mida de la base del triangle; 0,25 per l'alçada, i 0,25 pel càlcul de l'àrea (tot en funció de m). (b) Compteu 0,5 per la derivada; 0,25 per calcular els punts crítics; 0,5 per justificar el mínim, i 0,25 per calcular el valor de l'àrea.

2. a) Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - (2m - 3m) = m^2 + m = m(m + 1)$$

i observem que s'anul·la quan $m = 0$ i $m = -1$. Per tant,

- Si $m \neq 0$ i $m \neq -1$, el rang de la matriu de coeficients és $\text{rang}(A) = 3$, el rang de la matriu ampliada també i, com que també coincideix amb el nombre d'incògnites, 3, el sistema és compatible determinat; té, per tant, solució única.
- Si $m = 0$, la matriu de coeficients té determinant zero i rang 2 (per exemple, gràcies al menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$). Com que la matriu ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ també té rang 2, el sistema és compatible indeterminat i té infinites solucions que dependran d'un paràmetre.
- Si $m = -1$, la matriu de coeficients també té rang 2, mentre que el rang de l'ampliada és 3: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (desenvolupant, per exemple, el determinant de les tres darreres columnes per la segona fila). Per tant, el sistema és incompatible i no té solució.

b) Si $m = 1$, el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array} \right\}$$



i sabem que és compatible determinat. Substituint $x = -2z$ i $y = 1 + z$ a la primera equació obtenim

$$-2z + 3(1 + z) + z = 5,$$

d'on resulta $2z = 2$ i $z = 1$. Per tant, la solució és $(x, y, z) = (-2, 2, 1)$.

c) El sistema té infinites solucions quan és compatible indeterminat, és a dir, quan $m = 0$. En aquest cas, de les dues últimes equacions en resulta $z = 0$, i la primera ens diu $x + 3y = 5$. Per tant, les solucions del sistema són les de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 - 3k \\ y = k \in R \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel càlcul del determinant; 0,25 per la determinació dels valors crítics de m , i 0,25 per l'anàlisi de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0,5 punts per la resolució del sistema. (c) Compteu 0,25 punts per reconèixer el valor de m a què es refereix l'enunciat, i 0,5 pel càlcul de l'expressió paramètrica de la solució.

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$\begin{aligned} I &= \text{"practicar un esport d'impacte"}, \\ S &= \text{"patir sesamoïditis"} \end{aligned}$$

De les dades de l'enunciat sabem que $P(I) = 0,45$, $P(\bar{I}) = 1 - 0,45 = 0,55$, $P(S | I) = 0,1$, i $P(S | \bar{I}) = 0,03$. Per la llei de les probabilitats totals, tenim:

$$P(S) = P(S|I)P(I) + P(S|\bar{I})P(\bar{I}) = 0,1 \cdot 0,45 + 0,03 \cdot 0,55 = 0,0615.$$

b) Per la fórmula de Bayes:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)} = \frac{0,1 \cdot 0,45}{0,0615} \approx 0,7317 \dots$$

c) El primer any s'obtenen el màxim de beneficis, per tant $x = 1$ és un màxim de la funció i $f'(1) = 0$; i aquests beneficis obtinguts són de 8.000 €, per tant, $f(1) = 8$. També ens diuen que el segon any hi va haver un punt d'inflexió en els beneficis, per tant, $f''(2) = 0$. Calculem la primera i segona derivades de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ i imposem aquestes tres condicions:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c, \\ f''(x) &= 6ax + 2b, \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f(1) &= 8 \Rightarrow a + b + c = 8 \\ f''(2) &= 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \end{aligned} \right\}$$

Restant les dues primeres equacions, obtenim $2a + b = -8$ i, combinant amb la tercera:

$$\left. \begin{aligned} 12a + 2b &= 0 \\ 2a + b &= -8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{12a + 2b = 0}{-4a - 2b = 16} \Rightarrow a = \frac{16}{8} = 2.$$

Per tant, $2 \cdot 2 + b = -8$, d'on $b = -12$. Finalment,

$$a + b + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a - b = 8 - 2 + 12 = 18.$$

La funció que compta els beneficis d'aquesta empresa és, doncs, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer un arbre de decisió o similar); 0,25 per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,25 per plantejar correctament la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (c) Compteu 0,25 per imposar $f'(1) = 0$, 0,25 per imposar $f(1) = 8$, 0,25 per imposar $f''(2) = 0$ i 0,25 pel càlcul final.

4. OPCIÓ A. a) Com que $3\sin(\frac{0}{4}) = 0$ i $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, la gràfica inferior (la que passa pels punts A i C) és la del sinus, i la superior (la que passa per B i C) és la del cosinus. El punt B correspon al valor de $3\cos(\frac{0}{4}) = 3$, per tant és el punt $B = (0,3)$. Finalment, el punt C és el punt de tall entre el sinus i el cosinus, $3\sin(\frac{x}{4}) = 3\cos(\frac{x}{4})$,

$$\frac{3\sin(\frac{x}{4})}{3\cos(\frac{x}{4})} = 1 \rightarrow \tan\left(\frac{x}{4}\right) = 1 \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \pi.$$

Com que $3\sin(\frac{\pi}{4}) = 3\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, el punt de tall és $C = (\pi, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

b) Per a calcular el preu del vitrall necessitem trobar la seva àrea:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \left(3\cos\left(\frac{x}{4}\right) - 3\sin\left(\frac{x}{4}\right) \right) dx = \left[12\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 12\cos\left(\frac{x}{4}\right) \right]_0^{\pi} \\ &= 12 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos(0) \right) = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) \\ &= 12(\sqrt{2} - 1) \simeq 4,97 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Per tant, el preu del vitrall serà de $4,97 \text{ m}^2 \cdot 750 \frac{\text{€}}{\text{m}^2} = 3.725,5 \text{ €}$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per raonar quina gràfica és cadascuna; 0,25 per les coordenades del punt B , i 0,25 per les de C . (b) Compteu 0,25 per plantejar la integral correctament; 0,5 per la primitiva; 0,5 per trobar l'àrea, i 0,25 pel preu final. Compteu 0 de la part de la primitiva si no tracten adequadament el coeficient del sinus i del cosinus.

4. OPCIÓ B. a) Només cal aplicar la fórmula de la distància punt-pla per comprovar que

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Tot pla paral·lel a π és de la forma $2x - y + z = D$ per algun D real. Com que volem que passi pel punt P tenim

$$2 \cdot 0 - 1 + 3 = D$$

i, per tant, $D = 2$. El pla buscat és $\pi_1: 2x - y + z = 2$. Clarament la distància entre π_1 i π és $d(\pi_1, \pi) = d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) Per trobar un segon pla π_2 també paral·lel a π i que també estigui a distància $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π , buscarem el punt simètric, P' , de P respecte al pla π . Busquem la recta perpendicular a π que passa pel punt P . L'equació paramètrica d'aquesta recta és

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda \cdot (2, -1, 1) = (2\lambda, 1 - \lambda, 3 + \lambda).$$

Busquem el punt d'intersecció M de la recta r amb el pla π :

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2\lambda) - (1 - \lambda) + 3 + \lambda &= 5 \\ 6\lambda &= 3 \\ \lambda &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Per tant, $M = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Ara ens cal trobar el punt simètric P' de P respecte de π , fent per exemple $P' = P + 2\overrightarrow{PM} = (0, 1, 3) + 2 \cdot \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 0, 4)$.

Finalment el pla buscat és de la forma $2x - y + z = E$ per algun E real i passa per P' , així doncs,

$$2 \cdot 2 - 0 + 4 = E,$$

i $E = 8$. Tenim doncs que π_2 és el pla d'equació $2x - y + z = 8$.

Alternativament, també poden plantejar l'equació de la distància d'un pla paral·lel genèric, a un punt qualsevol de π i demanar que sigui $\sqrt{6}/2$. Una solució serà el π_1 i l'altra el pla buscat π_2 . Compteu bé aquesta manera alternativa si està ben justificada i calculada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la comprovació que la distància és la que diu l'enunciat (inclosa la simplificació de la fracció amb arrels). (b) Compteu 0,5 per l'equació del pla paral·lel i 0,25 per argumentar que la distància és la mateixa. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de la projecció, 0,5 pel càlcul del punt simètric, i 0,25 per l'equació final del pla.