

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z ,

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$$

se pide:

- Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible (1,2 puntos).
- Para ese valor obtenido en a) de α , calcular el conjunto de soluciones del sistema (1,3 puntos).
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α (0,8 puntos).

Solución:

a)

La matriz ampliada del sistema es

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes, M . En la matriz M tenemos el siguiente menor de orden 2, 1ª y 2ª filas con 1ª y 2ª columnas,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0, \text{ luego } \text{ran}(M) \geq 2$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 42 + 12 - 22 + 18 - 22 - 28 = 72 - 72 = 0$$

Por lo tanto $\text{ran}(M) = 2$

Estudiemos el rango de la matriz ampliada, M' . Orlamos el menor de orden 2 no nulo de M con la 4ª columna y 3ª fila de M' ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4\alpha + 4 - 6\alpha + 4 - 4 = 10 - 10\alpha$$

$$10 - 10\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$\text{Luego } \begin{cases} \text{Para } \alpha = 1 & \text{ran}(M') = 2 \\ \text{Para } \alpha \neq 1 & \text{ran}(M') = 3 \end{cases}$$

El sistema será compatible cuando $\text{ran}(M) = \text{ran}(M')$, es decir, para $\alpha = 1$.

b)

Resolvamos el sistema anterior para $\alpha = 1$.

Según obtuvimos en el anterior apartado el menor no nulo de orden 2 de M era el formado por la 1ª y 2ª fila y la 1ª y 2ª columna de M . Luego el sistema que debemos resolver estará formado por las dos primeras ecuaciones y las incógnitas principales serán x e y . Es decir, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 2 \end{cases} \quad x \text{ e } y \text{ incóg. princ.} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 + 3z \\ 2x + 6y = 2 + 11z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+3z & 2 \\ 2+11z & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 18z - 4 - 2z}{2} = \frac{2 - 4z}{2} = 1 - 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3z \\ 2 & 2+11z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2 + 11z - 2 - 6z}{2} = \frac{5z}{2}$$

Para $\alpha = 1$ el conjunto de soluciones es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \frac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c)

Para $\alpha \neq 1$

$\text{ran}(M) = 2$ y $\text{ran}(M') = 3$, sistema incompatible, los tres planos no tienen un corte común.

Considerando los planos dos a dos,

De lo estudiado en el apartado a), el primer y segundo planos no son paralelos porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

Veamos el 2º y 3º planos,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0 \quad \text{no son paralelos.}$$

Con el 1º y 3º planos sería,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \quad \text{no son paralelos.}$$

Luego los tres planos se cortan dos a dos pero no tienen ningún corte común.

Para $\alpha = 1$

$\text{ran}(M) = 2$ y $\text{ran}(M') = 2$, como hay tres incógnitas: sistema compatible indeterminado.

La solución de este sistema la hemos obtenido en el apartado b). Esta solución corresponde a la ecuación de una recta.

En este caso los tres planos se cortan en una recta.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas: $x + y - z = 5$ y $2x + y - 2z = 2$.

Y la recta s que pasa por los puntos $P = (3, 10, 5)$ y $Q = (5, 12, 6)$. Se pide:

- Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r (0,6 puntos) y de la recta s (0,4 puntos).
- Calcular el punto H intersección de r y s (0,6 puntos) y el ángulo α que determinan r y s (0,4 puntos).
- Calcular los puntos M y N de la recta r para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es 3 unidades de área (1,3 puntos).

Solución:

Datos del problema:

$$r: \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} P(3,10,5) \\ Q(5,12,6) \end{cases}$$

a) Ecuaciones paramétricas de r y s .

De r , resolver el sistema que la define,

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$ x e y incógnitas principales.

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x + y = 5 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{cases} \quad \text{Resolviéndolo por Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5+z & 1 \\ 2+2z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5+z-2-2z}{-1} = \frac{3-z}{-1} = -3+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2+2z-10-2z}{-1} = 8$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 8 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

De s , a partir de los dos puntos conocidos calculamos su vector director,

$$s: \begin{cases} P(3,10,5) \\ \vec{v} = \vec{PQ} = (2,2,1) \end{cases} \quad \text{luego } s: \begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = 10 + 2\mu \\ z = 5 + \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

b)

Corte entre r y s (H)

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas r y s obtenidas en el apartado anterior,

$$\begin{cases} -3 + \lambda = 3 + 2\mu \\ 8 = 10 + 2\mu \\ \lambda = 5 + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = 6 \\ 2\mu = -2 \\ \lambda - \mu = 5 \end{cases} \quad \text{de la 2ª ecuación } \mu = -1$$

sustituyendo el valor de μ en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} \lambda - 2(-1) = 6 \\ \lambda - (-1) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2 = 6 \\ \lambda + 1 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Como obtenemos el mismo valor de λ en las dos ecuaciones, el sistema tiene solución. Sustituyendo el valor de λ en la recta r o el valor de μ en la recta s obtendremos el punto H buscado.

Para $\lambda = 4$, $H(-3 + 4, 8, 4) = (1, 8, 4)$

El ángulo que forman las rectas r y s es el ángulo que forman sus vectores directores,

$$\vec{v}_r(1,0,1) \text{ y } \vec{v}_s(2,2,1)$$

$$\cos(\hat{r,s}) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{|(1,0,1) \cdot (2,2,1)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2} \sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{|2+1|}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Luego } \left(\hat{r,s}\right) = 45^\circ. \text{ Por lo que } \alpha = 45^\circ \text{ o } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rds}$$

c)

Como los puntos M y N pertenecen a la recta r sabemos que serán de la forma

$$(-3 + \lambda, 8, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El triángulo PQM está determinado por los puntos P , Q y M ; calculamos su área a partir de los vectores que determinan el triángulo, por ejemplo, $\vec{PQ}$ y $\vec{PM}$.

$$T : \text{triángulo } PQM \begin{cases} P(3,10,5) \\ Q(5,12,6) \\ M(-3 + \lambda, 8, \lambda) \end{cases} \quad \vec{PQ}(2,2,1) \text{ y } \vec{PM}(-6 + \lambda, -2, \lambda - 5)$$

$$A_T = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PM}|}{2}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 + \lambda & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 + \lambda & \lambda - 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 + \lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2\lambda - 10 + 2, -[2\lambda - 10 - (-\lambda + 6)], -4 + 12 - 2\lambda) = (2\lambda - 8, -\lambda + 4, -2\lambda + 8)$$

$$|\vec{PQ} \times \vec{PM}| = \sqrt{(2\lambda - 8)^2 + (-\lambda + 4)^2 + (-2\lambda + 8)^2} = \sqrt{4\lambda^2 - 32\lambda + 64 + \lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 32\lambda + 64} =$$

$$= \sqrt{9\lambda^2 - 72\lambda + 144} = \sqrt{9(\lambda^2 - 8\lambda + 16)} = \sqrt{9(\lambda - 4)^2} = 3|\lambda - 4|$$

$$A_T = \frac{3|\lambda - 4|}{2}$$

$$A_T = 3 \rightarrow \frac{3|\lambda - 4|}{2} = 3 \rightarrow |\lambda - 4| = 2 \quad \begin{cases} \lambda - 4 = 2 \rightarrow \lambda = 6 \\ \lambda - 4 = -2 \rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Obtenemos dos valores de λ , a partir de ellos obtendremos los dos puntos pedidos.

Para $\lambda = 6$ $M(3, 8, 6)$

Para $\lambda = 2$ $N(-1, 8, 2)$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

- a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \leq x \leq 4$ (1,1 puntos).
 b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$ (1,1 puntos).
 c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ (1,1 puntos).

Solución:

a)

Como la función $g(x)$ esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de $g(x)$.

$$y = x^2 - 4$$

La representación de $g(x)$ será:

Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0, -4)$

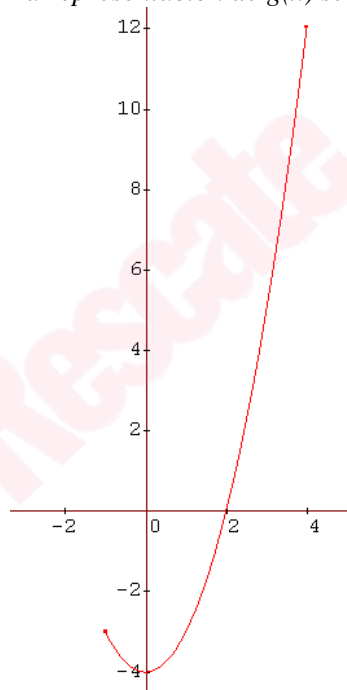
eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Vértice $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$, $(0, -4)$

Calculemos el inicio y fin de $g(x)$

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$



b)

$$f(x) = |x^2 - 4| \text{ en el intervalo } [-1, 4]$$

Por su definición $f(x) = |g(x)|$

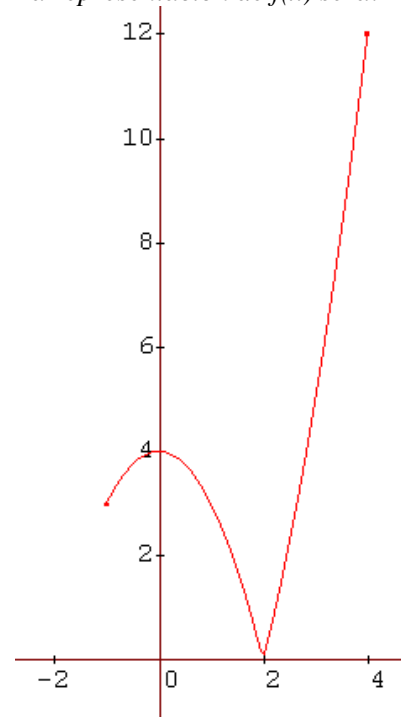
Por lo que podemos dibujar la función $f(x)$ a partir de la representación de $g(x)$ trazando la parte negativa de $g(x)$ simétrica respecto del eje OX.

Los valores máximo y mínimo absoluto de $f(x)$ podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

el máximo absoluto se alcanza en el punto $(4, 12)$

el mínimo absoluto se alcanza en el punto $(2, 0)$

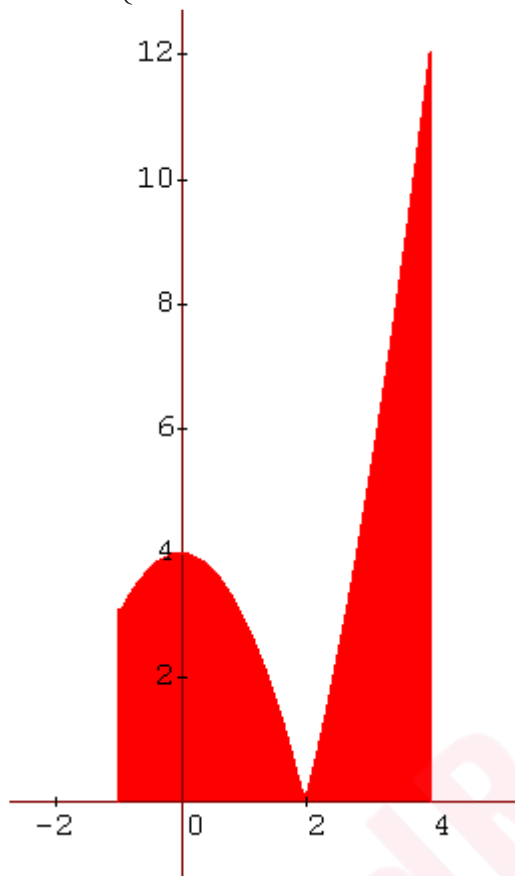
La representación de $f(x)$ será:



c)

La definición de $f(x)$ es $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , \quad -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & , \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 = \\ &= \left[\left(\frac{-8}{3} + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - 4 \right) \right] + \left[\left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right] = \\ &= \frac{-8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{47}{3} + 4 = \frac{47+12}{3} = \frac{59}{3} \end{aligned}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ u. a.

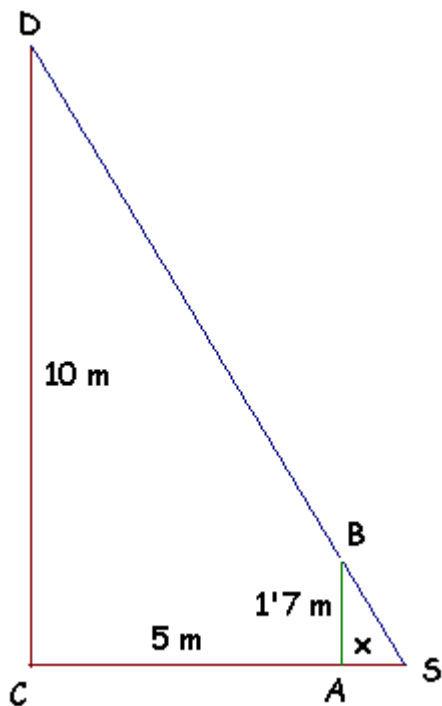
EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Una persona camina a la velocidad constante de 3m/s alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura. Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcular:

- La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol (2 puntos).
- La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar (1,3 puntos).

Solución:

a) El gráfico correspondiente al problema es (los segmentos CD y AB representan, respectivamente, al farol y a la persona):



Podemos resolver este problema de dos formas:

A1) Por triángulos semejantes.

Los triángulos SAB y SCD son triángulos rectángulos con ángulo agudo común en el vértice S , por lo que son semejantes.

Podemos aplicar el teorema de Thales,

$$\frac{x}{x+5} = \frac{1,7}{10} \rightarrow 10x = 1,7x + 8,5$$

$$8,3x = 8,5 \rightarrow x = \frac{8,5}{8,3} = 1,024$$

La longitud de la sombra es de 1,024 m.

A2) Por geometría analítica.

Consideramos C el origen de coordenadas.

Obtengamos la ecuación de la recta r , pasa por D y B .

Esta recta pasa por los puntos $D(0,10)$ y $B(5,1,7)$; su vector director será $v(-5, 8,3)$. La ecuación será:

$$\frac{x-0}{-5} = \frac{y-10}{8,3} \rightarrow y = \frac{-8,3x}{5} + 10$$

Calculamos la longitud de la sombra buscando el punto de corte de la recta r con el eje de abscisas, S .

$$y=0 \rightarrow 0 = \frac{-8,3x}{5} + 10 \rightarrow 0 = -8,3x + 50$$

$$x = \frac{50}{8,3}$$

El punto S es $\left(\frac{50}{8,3}, 0\right)$

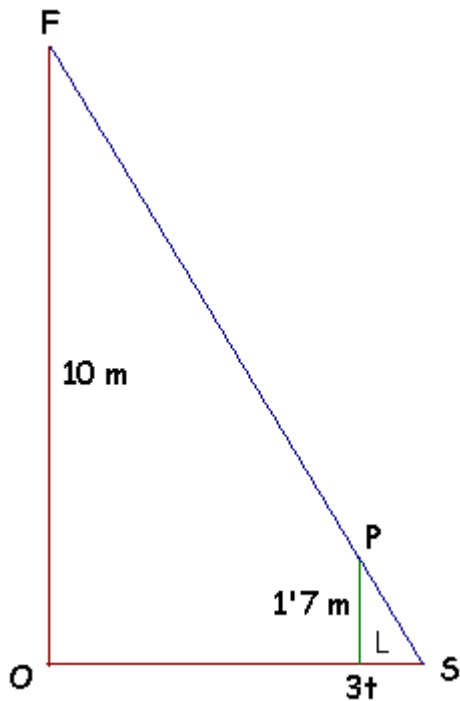
Como el punto A tiene de coordenadas $(5,0)$, la longitud de la sombra, x , será:

$$\frac{50}{8,3} - 5 = \frac{50 - 41,5}{8,3} = \frac{8,5}{8,3} = 1,024 \text{ m.}$$

b)

Calculando la longitud de la sombra en función del tiempo, la derivada de esta longitud nos dará la velocidad de crecimiento de la sombra.

Al cabo de t segundos la persona, como camina a una velocidad de 3 m/s, habrá recorrido $3t$ m. Gráficamente tendremos la siguiente situación,



Calcularemos la longitud de la sombra al cabo de t segundos, L , obteniendo la ecuación de la recta que pasa por los puntos F y P , r .

Sus coordenadas son:

$F(0, 10)$ y $P(3t, 1'7)$

el vector director de la recta buscada: $(3t, -8'3)$.

La ecuación será:

$$\frac{x-0}{3t} = \frac{y-10}{-8'3} \rightarrow y = \frac{-8'3x}{3t} + 10$$

Calculamos la longitud de la sombra buscando el punto de corte de la recta r con el eje de abscisas, S .

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-8'3x}{3t} + 10 \rightarrow 0 = -8'3x + 30t$$

$$x = \frac{30t}{8'3}$$

El punto S es $\left(\frac{30t}{8'3}, 0\right)$

La longitud de la sombra será:

$$L = \frac{30t}{8'3} - 3t = \frac{30t - 24'9t}{8'3} = \frac{5'1t}{8'3}$$

La velocidad de crecimiento de la sombra será:

$$L' = \frac{5'1}{8'3} \text{ es decir } \frac{5'1}{8'3} \text{ m/s} = 0'614 \text{ m/s}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide

- Probar que la matriz T tiene matriz inversa, T^{-1} , y calcular dicha matriz inversa T^{-1} (1,3 puntos).
- Dada la ecuación con matriz incógnita B , $A = T^{-1} B T$, calcular el determinante de B (0,8 puntos).
- Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b) (1,2 puntos).

Solución:

a) La matriz T que es 3×3 tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{F_2 + F_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

Por lo que existe T^{-1} . Calculémosla.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \hline \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A = T^{-1} B T$, ¿ $|B|$?

Por las propiedades de los determinantes,

$$|A| = |T^{-1} B T| = |T^{-1}| |B| |T| = \frac{1}{|T|} |B| |T| = |B|$$

$$\text{Luego } |B| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

c) $A = T^{-1} B T$, ¿ B ?

Para obtener la expresión de la matriz B multiplicamos la igualdad dada de la siguiente forma: T por la izquierda y T^{-1} por la derecha,

$$T A T^{-1} = T T^{-1} B T T^{-1}$$

$$T A T^{-1} = I B I$$

$T A T^{-1} = B$, calculamos la matriz B efectuando el cálculo matricial que la define.

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los puntos $A = (4, -4, 9)$; $B = (2, 0, 5)$; $C = (4, 2, 6)$; $L = (1, 1, 4)$; $M = (0, 2, 3)$; y $N = (3, 0, 5)$, se pide:

- Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B (0,5 puntos) y el área S del triángulo de vértices A, B, C (1 punto).
- Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C (0,4 puntos) y del plano π' que pasa por los puntos L, M, N (1 punto).
- Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' (0,6 puntos) y el ángulo α que determinan los planos π y π' (0,4 puntos)

Solución:

a)

$$\text{Sea } d = d\left(C, PM_{\overline{AB}}\right)$$

$$C = (4, 2, 6)$$

$$PM_{\overline{AB}} \begin{cases} A(4, -4, 9) \\ B(2, 0, 5) \end{cases} \quad PM_{\overline{AB}}(3, -2, 7)$$

$$d = d((4, 2, 6), (3, -2, 7)) = \sqrt{(4-3)^2 + (2+2)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ u.l.}$$

Sea A_S el área del triángulo S .

$$A_S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AB} = (2, 0, 5) - (4, -4, 9) = (-2, 4, -4) \quad \vec{AC} = (4, 2, 6) - (4, -4, 9) = (0, 6, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (12, 6, -12)$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{144 + 36 + 144} = \sqrt{324} = 18$$

$$A_S = \frac{1}{2} 18 = 9 \text{ u.a.}$$

b)

$$\text{Plano } \pi \text{ pasa por } A, B \text{ y } C; \text{ sus vectores directores pueden ser } \begin{cases} \vec{AB} = (-2, 4, -4) \\ \vec{AC} = (0, 6, -3) \end{cases}$$

$$\text{los vectores directores de } \pi \begin{cases} \vec{u}(1, -2, 2) \\ \vec{v}(0, 2, -1) \end{cases}$$

La ecuación implícita del plano π la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 0 \\ y+4 & -2 & 2 \\ z-9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z-9) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)(-2) - (y+4)(-1) + (z-9)2 = 0$$

$$-2x + 8 + y + 4 + 2z - 18 = 0$$

$$-2x + y + 2z - 6 = 0$$

La ecuación implícita del plano π es $-2x + y + 2z - 6 = 0$

Plano π' pasa por L, M y N ; sus vectores directores pueden ser $\begin{cases} \vec{ML} = (1, -1, 1) \\ \vec{MN} = (3, -2, 2) \end{cases}$

La ecuación implícita del plano π' la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 3 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(0) - (y-2)(-1) + (z-3)1 = 0$$

$$y - 4 + z - 3 = 0$$

$$y + z - 5 = 0$$

La ecuación implícita del plano π' es $y + z - 5 = 0$

c)

$$r: \pi \cap \pi'$$

$$r: \begin{cases} -2x + y + 2z - 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

x e y serán las incógnitas principales. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -2x + y = 6 - 2z \\ y = 5 - z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $-2x + 5 - z = 6 - 2z$; $-2x = 1 - z$;

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$$

$$\text{La ecuación paramétrica de la recta } r \text{ será } \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular el ángulo que forman los planos π y π' obtenemos sus vectores normales,

$$\vec{n}_{\pi}(-2,1,2) \quad \text{y} \quad \vec{n}_{\pi'}(0,1,1)$$

$$\cos\left(\hat{\vec{n}_{\pi}, \vec{n}_{\pi'}}\right) = \frac{|(-2,1,2) \cdot (0,1,1)|}{\sqrt{4+1+4} \sqrt{1+1}} = \frac{|1+2|}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\hat{\vec{n}_{\pi}, \vec{n}_{\pi'}}\right) = 45^{\circ} \Rightarrow \left(\hat{\pi, \pi'}\right) = 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}$$

$$\text{Solución} \quad \left(\hat{\pi, \pi'}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rds} \quad \text{o} \quad 45^{\circ}$$

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo cerrado $[1, e]$, siendo $e = 2,718281\dots$:

- Razonar que existe un punto P de la gráfica $y = \ln x$ en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (e, 1)$ (1 punto).
- Obtener el punto P considerado en a) (1,8 punto).
- Calcular la pendiente de la recta tangente a $y = \ln x$ en ese punto P (0,5 puntos).

Solución:

a) $f(x) = \ln x$, $x \in [1, e]$

Calculemos los valores de la función $f(x)$ en los extremos del intervalo de definición,

$f(1) = \ln 1 = 0$, luego el punto $A(1,0)$ es de la gráfica de $y = \ln x$

$f(e) = \ln e = 1$, luego el punto $B(e,1)$ “ “ “ “ “ “

Veamos si $f(x)$ verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[1,e]$

$f(x)$ es continua en $[1,e]$ por ser $f(x)$ continua en $(0,+\infty)$

$f(x)$ es derivable en $(1,e)$ por la misma razón que antes

como $f(x)$ verifica las condiciones del TVM concluimos que

$$\exists c \in (1,e) / f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

La recta que pasa por los puntos A y B tiene de pendiente $\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

Por lo tanto en el punto de abscisa c , valor obtenido en el TVM, la recta tangente a $f(x)$ cuya pendiente es $f'(c)$, es paralela a la recta que pasa por A y B (puesto que tienen la misma pendiente)

Solución: el punto P de la gráfica buscado es el $(c, \ln c)$

b)

Como $f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \rightarrow c = e-1$

El punto P será $(e-1, \ln(e-1))$

c)

La pendiente de la recta tangente a $y = \ln x$ en el punto P será, según lo obtenido en los apartados anteriores,

$$\frac{1}{e-1}$$

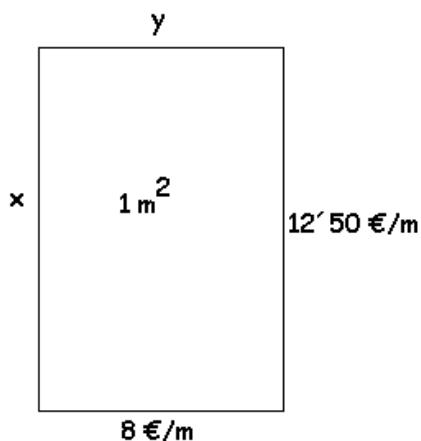
EJERCICIO B

PROBLEMA 4. El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

- a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible (2,3 puntos).
 b) Calcular, además el coste de ese marco más económico posible considerado en a) (1 punto).

Solución:

a)



Los datos iniciales del problema podemos representarlos mediante la figura de la izquierda.

Llamando C al coste del marco de la ventana, éste se obtendrá:

$$C = 12'50 \cdot 2x + 8 \cdot 2y \quad (x \text{ longitud vertical e } y \text{ longitud horizontal en m.})$$

$$C = 25x + 16y$$

Como la superficie de la ventana debe ser de 1 m^2 ,

$$xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow C = 25x + \frac{16}{x}$$

Busquemos el valor de x para el que sale un coste mínimo.

$$C' = 25 - \frac{16}{x^2}$$

$$25 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow 25x^2 = 16 \rightarrow x^2 = \frac{16}{25} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$$

La solución negativa no tiene sentido, ya que x es la longitud de un lado

$$x = \sqrt{\frac{16}{25}} = 0'8$$

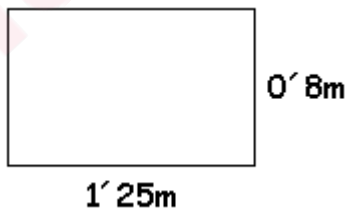
$$C'' = \frac{32}{x^3}$$

Para $x = 0'8$, $C'' > 0$, luego en $x = 0'8$ hay un mínimo.

Para $x = 0'8$ $y = 1'25$

Para que el marco resulte lo más económico posible debe tener $0'8 \text{ m}$ de lado vertical y $1'25 \text{ m}$ de lado horizontal.

La solución es una ventana de la forma



b)

El coste del marco obtenido en el apartado anterior será: $C = 25 \cdot 0'8 + 16 \cdot 1'25 = 40$, es decir, 40 €