

## OPCIÓN A

**PROBLEMA A.1.** Dado el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = k - 2 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \end{cases}$$
, donde  $k$  es un parámetro real.

- Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de  $k$ . (4 puntos)
- Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando  $k = -1$ . (3 puntos)
- Resolver **razonadamente** el sistema cuando  $k = 0$ . (3 puntos)

*Solución:*

Estudiamos el sistema 
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = k - 2 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \end{cases}$$
 Su matriz ampliada,  $A'$ , es 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes,  $A$ , es  $3 \times 3$  por lo que su máximo rango posible será 3.  
 $A'$  es  $3 \times 4$  por lo que su máximo rango posible será 3.

Empezamos estudiando el rango de  $A$ ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4k^2 + 15 - 8 - 5k^2 - 18 = -k^2 + 1$$

$$-k^2 + 1 = 0 \rightarrow k^2 = 1 \rightarrow k = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Procedamos a responder a los tres apartados.

a) De los cálculos realizados anteriormente deducimos,

**Para  $k \neq -1, 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$  y como el máximo rango de  $A'$  también es 3,  $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') = n^\circ$  de incógnitas  $\rightarrow$  Sistema compatible determinado**

Para  $k = -1$ ,

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \text{ y sabemos que } |A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) \leq 2$$

Calculemos el rango de  $A$ ,

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculemos el rango de  $A'$ ,

Sólo nos falta por estudiar el menor de orden 3 que se obtiene al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de  $A'$ ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 4 + 3 + 12 = -19 + 19 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Luego,  $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$  de incógnitas. **Para  $k = -1$  el sistema es compatible indeterminado.**

Para  $k = 1$ ,

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que  $|A| = 0$  y considerando el cálculo del rango de  $A$  realizado en el caso anterior,  $\text{ran}(A) = 2$ .  
 Calculemos el rango de  $A'$ , ( $\text{ran}(A') \geq \text{ran}(A) = 2$ )

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

al orlar el menor de orden 2 no nulo anterior con la tercera fila y la cuarta columna de  $A'$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 3 + 4 + 1 - 12 = 13 - 17 = -4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego,  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$ , sistema incompatible. **Para  $k = 1$  el sistema es incompatible.**

Resumiendo, **Para  $k \neq -1, 1$  el sistema es compatible determinado**

**Para  $k = -1$  el sistema es compatible indeterminado**

**Para  $k = 1$  el sistema es incompatible**

b) Para  $k = -1$  sabemos que el sistema es compatible indeterminado

Por el estudio realizado anteriormente, el sistema a resolver está formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y las incógnitas principales son  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2z \\ 2x + 4y = -3 - 5z \end{cases} \rightarrow \text{Por Cramer} \rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -1-2z & 3 \\ -3-5z & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4-8z+9+15z}{-2} = \frac{5+7z}{-2} = \frac{-5-7z}{2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-2z \\ 2 & -3-5z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-5z+2+4z}{-2} = \frac{-1-z}{-2} = \frac{1+z}{2} \end{aligned}$$

Para  $k = -1$ , la solución es: 
$$\begin{cases} x = \frac{-5-7\lambda}{2} \\ y = \frac{1+\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para  $k = 0$ , como es distinto de  $-1$  y  $1$ , del estudio del apartado a) sabemos que el sistema es compatible determinado

$$\text{El sistema a resolver es } \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = -2 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

De este sistema sabemos que  $|A| = -k^2 + 1 \Big|_{k=0} = 1$ . Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -12 + 18 = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -6 - 5 + 4 + 6 = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -6 + 4 = -2$$

Finalmente, para  $k = 0$  la solución del sistema es  $x = 6$ ,  $y = -1$ ,  $z = -2$ .

**PROBLEMA A.2.** Se dan el punto  $A = (-1, 0, 2)$  y las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$  y  $s: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La ecuación del plano  $\pi$  que pasa por el punto  $A$  y contiene a la recta  $r$ . (3 puntos)
- La ecuación del plano  $\sigma$  que pasa por el punto  $A$  y es perpendicular a la recta  $s$ . (3 puntos)
- Un vector dirección de la recta  $l$  intersección de los planos  $\pi$  y  $\sigma$  (2 puntos) y la distancia entre las rectas  $s$  y  $l$ . (2 puntos)

*Solución:*

a) Hay que obtener el plano  $\pi / A \in \pi$  y  $r \subset \pi$ .

Para obtener la ecuación del plano  $\pi$  necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

De la recta  $r$  conocemos:  $\begin{cases} \text{punto } P_r = (1, 0, 2) \\ \text{vector } \vec{v}_r = (2, 3, 1) \end{cases}$

Ahora obtenemos el vector  $\overrightarrow{AP_r} = (2, 0, 0)$ . Como  $\overrightarrow{AP_r}$  no es paralelo a  $\vec{v}_r$ ,  $\left(\frac{2}{2} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{0}{1}\right)$ ,  $\overrightarrow{AP_r}$  es otro vector director del plano  $\pi$ .

Elementos del plano pedido:  $\begin{cases} \text{Punto } A(-1, 0, 2) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{AP_r} = (2, 0, 0) \end{cases} \end{cases}$ , la ecuación general del plano  $\pi$  la

obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - 0 & z - 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila:

$$2 \begin{vmatrix} y & z - 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(y - 3(z - 2)) = 0 \rightarrow (y - 3(z - 2)) = 0 \rightarrow y - 3z + 6 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano  $\pi$  es:  $y - 3z + 6 = 0$

b) Hay que obtener el plano  $\sigma / A \in \sigma$  y  $s \perp \sigma$ .

Como  $s \perp \sigma$ , el vector director de la recta  $s$  es perpendicular al plano  $\sigma$ .  $\vec{v}_s = (-2, 3, 1)$ , por lo tanto la ecuación del plano  $\sigma$  será:  $-2x + 3y + z + D = 0$

Como  $A \in \sigma \rightarrow -2(-1) + 3 \cdot 0 + 2 + D = 0; 2 + 2 + D = 0; 4 + D = 0; D = -4$

Por lo tanto, la ecuación general del plano  $\sigma$  es:  $-2x + 3y + z - 4 = 0$

c) Obtener un vector director de la recta  $l$ .

Como la recta  $l$  es la intersección de los planos  $\pi$  y  $\sigma$  entonces  $l: \begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$  por lo tanto un vector director de  $l$  lo obtenemos mediante el siguiente cálculo,

$$\vec{v}_l = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = (10, 6, 2) \equiv (5, 3, 1)$$

Por lo tanto  $\vec{v}_l = (5, 3, 1)$

Obtener la distancia entre las rectas  $s$  y  $l$ .

Veamos si las rectas son paralelas,  $\vec{v}_l = (5, 3, 1)$  y  $\vec{v}_s = (-2, 3, 1)$ ,  $\frac{5}{-2} \neq \frac{3}{3} = \frac{1}{1}$ , luego las rectas no son paralelas.

Podemos calcular  $d(s, l)$  mediante la fórmula correspondiente:  $d(s, l) = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{v}_s & \vec{v}_l & \overrightarrow{P_s P_l} \end{bmatrix} \right|}{\left| \vec{v}_s \times \vec{v}_l \right|}$

Calculemos cada uno de los términos de la fórmula anterior.

Obtengamos  $P_l$ , punto de la recta  $l$ :  $\begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$  que era la intersección de los planos  $\pi$  y

$\sigma$  y por definición de estos dos planos el punto  $A$  está en los dos, luego  $P_l = A = (-1, 0, 2)$ .

$$\overrightarrow{P_s P_l} = (-1, 0, 2) - (-1, 1, 1) = (0, -1, 1)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_s & \vec{v}_l & \overrightarrow{P_s P_l} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 5 - 2 - 15 = -28$$

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_l = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{j} - 21\vec{k} = (0, 7, -21)$$

$$\left| \vec{v}_s \times \vec{v}_l \right| = |(0, 7, -21)| = \sqrt{0^2 + 7^2 + (-21)^2} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$$

$$Y \quad d(s, l) = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{v}_s & \vec{v}_l & \overrightarrow{P_s P_l} \end{bmatrix} \right|}{\left| \vec{v}_s \times \vec{v}_l \right|} = \frac{|-28|}{7\sqrt{10}} = \frac{28}{7\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1.2649 \text{ u.l.}$$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula anterior, sería obtener un plano  $\tau$  que contiene a la recta  $s$  y es paralelo a la recta  $l$ . De esta forma  $d(s, l) = d(P_l, \tau)$

Calculemos la ecuación del plano  $\tau$ :  $s \subset \tau$  y  $l \parallel \tau \rightarrow \vec{n}_\tau = \vec{v}_s \times \vec{v}_l$ , que hemos calculado anteriormente,  $\vec{n}_\tau = (0, 7, -21) \approx (0, 1, -3)$

Luego  $\tau: y - 3z + D = 0$ . Como la recta  $s$  está en el plano  $\tau$ ,  $P_s(-1, 1, 1)$  es de  $\tau$  por lo que:  $1 - 3 \cdot 1 + D = 0$ ;  $1 - 3 + D = 0$ ;  $-2 + D = 0$ ;  $D = 2$ . Luego  $\tau: y - 3z + 2 = 0$ .

$$d(s, l) = d(P_l, \tau) = \left\{ P_l = (-1, 0, 2) \right\} = \frac{|0 - 3 \cdot 2 + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \approx 1.2649 \text{ u.l.}$$

Por lo tanto,  $d(s, l) = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ u.l.} \approx 1.2649 \text{ u.l.}$

**PROBLEMA A.3.** Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de  $m$  para el cual la función  $f(x) = \begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x \leq 0 \\ \frac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \end{cases}$  es continua en  $x = 0$ . (3 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función  $(x+1)e^{2x}$ . (3 puntos)
- c) La integral  $\int (x+1)e^{2x} dx$ , (2 puntos) y el área limitada por la curva  $y = (x+1)e^{2x}$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $y = 0$ . (2 puntos)

*Solución:*

a)  $m? / f(x)$  es continua en  $x = 0$

Condiciones para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$ .

1) ¿Existe  $f(0)$ ?

$$f(0) = m(0+1)e^{2 \cdot 0} = m e^0 = m \cdot 1 = m. \quad \text{Existe } f(0) = m$$

2) ¿Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , como a la izquierda y derecha de  $0$  la función  $f(x)$  tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (m(x+1)e^{2x}) = m(0+1)e^{2 \cdot 0} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x} = \frac{(0+1)\operatorname{sen} 0}{0} = \left( \frac{0}{0} \right) = \left( \text{resolvemos la indeterminación aplicando la} \right.$$

$$\left. \text{Regla de L'Hopital} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x}{1} = \operatorname{sen} 0 + (0+1)\cos 0 = 1$$

Para que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto  $m = 1$ .

3) Para este valor de  $m$  se cumple la tercera condición de continuidad:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Luego,  $f(x)$  es continua en  $x = 0$  para  $m = 1$ .

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $y = (x+1)e^{2x}$

En primer lugar,  $\operatorname{Dom} y = \mathbb{R}$

Calculemos  $y'$

$$y' = e^{2x} + (x+1)2e^{2x} = e^{2x} + (2x+2)e^{2x} = (1+2x+2)e^{2x} = (2x+3)e^{2x}$$

Estudiamos el signo de  $y'$

$$(2x+3)e^{2x} = 0 \quad \begin{cases} 2x+3=0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \\ e^{2x}=0 \rightarrow \text{sin solución} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} > 0$ , luego el signo de  $y'$  solo depende de  $(2x+3)$  que es un polinomio de primer grado con coeficiente de  $x$  positivo y cuya raíz es  $\frac{-3}{2}$ , por lo tanto el signo de  $(2x+3)$  es:

$$\begin{array}{c} - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \\ \qquad \qquad \qquad \frac{-3}{2} \end{array}$$

Y finalmente,  $y = (x+1)e^{2x}$  es decreciente en  $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$  y creciente en  $\left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$ .

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = (x+1) \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} + C = \left( \frac{x+1}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4} e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4} e^{2x} + C$$

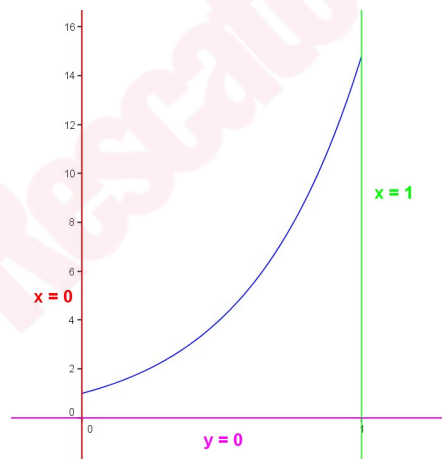
Es decir,  $\int (x+1)e^{2x} dx = \frac{2x+1}{4} e^{2x} + C$

Para obtener el área limitada por la curva  $y = (x+1)e^{2x}$  y las rectas  $x=0$ ,  $x=1$  e  $y=0$  es conveniente realizar la representación gráfica.

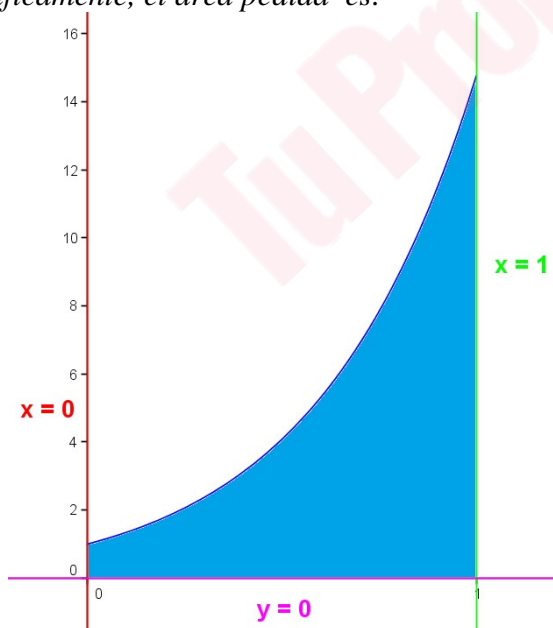
En primer lugar representemos la curva  $y = (x+1)e^{2x}$  que según lo estudiado en el apartado b) entre  $x=0$  y  $x=1$  es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:

| x | y = (x+1) e <sup>2x</sup> |
|---|---------------------------|
| 0 | 1                         |
| 1 | 2 e <sup>2</sup> ≈ 1478   |

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \left[ \frac{2x+1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4} e^{2 \cdot 1} - \frac{2 \cdot 0 + 1}{4} e^{2 \cdot 0} =$$

$$= \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^0 = \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918 \text{ u.a.}$$

Finalmente, el área pedida mide:  $\left( \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) \text{ u.a.} \approx 5'2918 \text{ u.a.}$

## OPCIÓN B

**PROBLEMA B.1.** Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $C = (-1 \ 1 \ 3)$ .

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La matriz inversa  $A^{-1}$  de la matriz  $A$ . (3 puntos)
- La matriz  $X$  que es solución de la ecuación  $AX = BC$ . (4 puntos)
- El determinante de la matriz  $2M^3$ , siendo  $M$  una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale  $1/2$ . (3 puntos)

*Solución:*

a) Calculemos  $|A|$  para asegurarnos de que existe  $A^{-1}$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos  $A^{-1}$  por el método de los adjuntos,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



b) Obtener la matriz  $X$  /  $A X = B C$

En el apartado anterior hemos obtenido la matriz  $A^{-1}$ , multiplicando la ecuación anterior por  $A^{-1}$  por la izquierda:  $A^{-1} A X = A^{-1} B C \rightarrow I X = A^{-1} B C \rightarrow X = A^{-1} B C$

Calculemos la matriz  $X$  mediante el producto anterior,

$$X = A^{-1} B C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) + 1 \cdot 1 - 2(-1) \\ 0(-2) + 1 \cdot 1 - 1(-1) \\ 0(-2) + 0 \cdot 1 + 1(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Solución:**  $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Sabemos que  $M$  es una matriz  $2 \times 2$  y que  $|M| = \frac{1}{2}$ , hay que calcular  $|2 M^3|$

De las propiedades de los determinantes sabemos que  $|M N| = |M| |N|$  y que si  $M$  es  $n \times n$   $|\alpha M| = \alpha^n |M|$ .

$$|2 M^3| = |2 M M M| = |2 M| |M| |M| = 2^2 |M| |M| |M| = 4 (|M|)^3 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

**Solución:**  $|2 M^3| = \frac{1}{2}$

## OPCIÓN B

**PROBLEMA B.2.** Se da el triángulo  $T$ , cuyos vértices son  $A = (1, 2, -2)$ ,  $B = (0, -3, 1)$  y  $C = (-1, 0, 0)$ ,

y los planos  $\pi_1: x + y + z + 1 = 0$  y  $\pi_2: \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La posición relativa del plano  $\pi_1$  y del plano que contiene al triángulo  $T$ . (4 puntos)
- Un vector  $\vec{n}_1$  perpendicular al plano  $\pi_1$  y un vector  $\vec{n}_2$  perpendicular al plano  $\pi_2$  (1,5 puntos) y el coseno del ángulo formado por los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$ . (1,5 puntos)
- Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . (3 puntos)

*Solución:*

a) Posición relativa del plano  $\pi_1$  y del plano que contiene al triángulo  $T$ , lo llamaremos  $\pi_3$ .

De  $\pi_3$  conocemos:  $\begin{cases} \text{punto } C = (-1, 0, 0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, 3, -1) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano  $\pi_3$  se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - 0 & z - 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & y & z \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x+1) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1)(-4) - y \cdot 4 + z(-8) = 0$$

$$\begin{aligned} -4x - 4 - 4y - 8z &= 0 \\ 4x + 4y + 8z + 4 &= 0 \\ x + y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Estudiemos la posición relativa de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_3$ , para ello estudiamos el sistema formado por sus dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}, \text{ de este sistema su matriz ampliada es } M' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes,  $M$ , es  $2 \times 3$ , su máximo rango será 2.  $M'$  es  $2 \times 4$ , su máximo rango será 2. Estudiemos el rango de  $M$ :

$$|I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Y, como el máximo rango de  $M'$  es 2,  $\text{ran}(M') = 2$

Luego  $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} = 3$  entonces los dos planos se cortan en una recta.

b)  $\pi_1: x + y + z + 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 1).$

Para obtener el vector  $\vec{n}_2$  /  $\vec{n}_2 \perp \pi_2$ , obtengamos la ecuación general del plano  $\pi_2$  (además, la necesitaremos en el apartado c))

Del plano  $\pi_2$  conocemos: 
$$\begin{cases} \text{punto } (1, 0, 0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \vec{u}_2 = (-1, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (1, -2, 1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano  $\pi_2$  se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) \cdot 3 - y(-2) + z \cdot 1 = 0$$

$$3x - 3 + 2y + z = 0 \rightarrow \pi_2: 3x + 2y + z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (3, 2, 1)$$

**Por lo tanto,  $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$  y  $\vec{n}_2 = (3, 2, 1)$**

Calculemos el coseno del ángulo que forman los vectores anteriores:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (3, 2, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3 + 2 + 1}{\sqrt{3} \sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6 \sqrt{42}}{42} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0.9258$$

**Por lo tanto,  $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0.9258$**

c) Llamamos  $r: \pi_1 \cap \pi_2$

Luego  $r: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ , el sistema a resolver es:  $\begin{cases} x + y = -1 - z \\ 3x + 2y = 3 - z \end{cases}$ . Podemos resolverlo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ 3-z & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2-2z-3+z}{-1} = \frac{-5-z}{-1} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 3 & 3-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3-z+3+3z}{-1} = \frac{6+2z}{-1} = -6-2z$$

Las ecuaciones paramétricas de  $r$  son: 
$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## OPCIÓN B

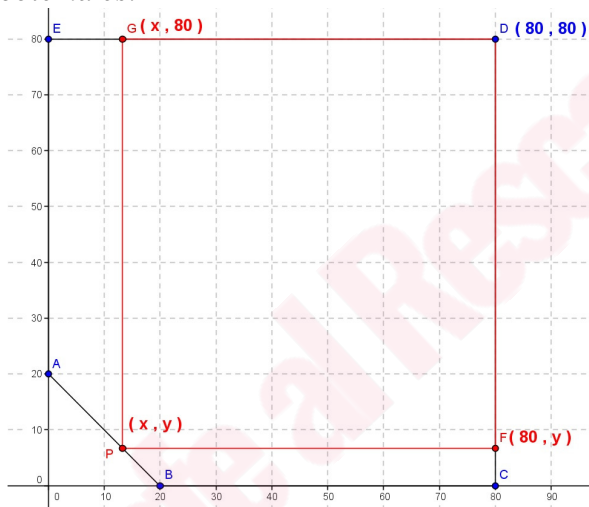
**PROBLEMA B.3.** Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices  $A = (0, 20)$ ,  $B = (20, 0)$ ,  $C = (80, 0)$ ,  $D = (80, 80)$  y  $E = (0, 80)$ . Para obtener una pieza rectangular se elige un punto  $P = (x, y)$  del segmento  $AB$  y se hacen dos cortes paralelos a los ejes  $X$  e  $Y$ . Así se obtiene un rectángulo cuyos vértices son los puntos  $P = (x, y)$ ,  $F = (80, y)$ ,  $D = (80, 80)$  y  $G = (x, 80)$ .

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área del rectángulo  $R$  en función de  $x$ , cuando  $0 \leq x \leq 20$ . (3 puntos)
- El valor de  $x$  para el que el área del rectángulo  $R$  es máxima. (5 puntos)
- El valor del área máxima del rectángulo  $R$ . (2 puntos)

*Solución:*

*La representación gráfica del problema es:*



a) Área del rectángulo  $R$  de vértices  $PFDG$

El lado  $PF$  mide  $(80 - x)$  cm, el lado  $PG$  mide  $(80 - y)$  cm. El área del rectángulo  $R$  quedaría en función de  $x$  e  $y$ . Para expresar el área de  $R$  en función de  $x$ , consideramos que el punto  $P(x, y) \in \overline{AB}$ .

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  para expresar  $y$  en función de  $x$ .

$$\begin{cases} A = (0, 20) \\ B = (20, 0) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} \text{Punto } (0, 20) \\ \text{v. director } (20, -20) \approx (1, -1) \end{cases} \text{ luego } r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-20}{-1} \rightarrow -x = y - 20 \rightarrow y = -x + 20$$

El área de rectángulo  $R$  será:

$$A_R = (80 - x)(80 - y) = (80 - x)[80 - (-x + 20)] = (80 - x)(80 + x - 20) = (80 - x)(60 + x) = -x^2 + 20x + 4800$$

**Solución:** el área del rectángulo  $R$  es  $-x^2 + 20x + 4800$  ( $\text{cm}^2$ ), cuando  $0 \leq x \leq 20$  (cm)

b) Valor de  $x / A_R$  es máxima.

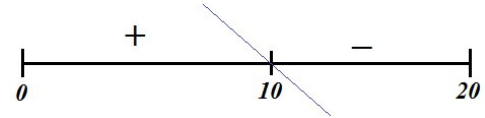
$$A_R = -x^2 + 20x + 4800, \text{ cuando } 0 \leq x \leq 20$$

$$A_R' = -2x + 20$$

$$-2x + 20 = 0 \rightarrow -2x = -20 \rightarrow x = \frac{-20}{-2} = 10$$

Estudiamos el signo de  $A_R'$  a la izquierda y derecha de 10.

Como  $A_R'$  es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 10:



Luego en  $x = 10$   $A_R$  tiene un máximo relativo que es el absoluto en  $[0, 20]$  ya que a la izquierda de 10  $A_R$  es creciente y a la derecha es decreciente.

**Solución:** el área del rectángulo  $R$  es máxima para  $x = 10$  cm.

c) Para  $x = 10$ ,  $A_R = -10^2 + 20 \cdot 10 + 4800 = -100 + 200 + 4800 = 4900$

**Solución:** el área máxima del rectángulo  $R$  mide  $4900 \text{ cm}^2$ .

Tu Profeta al Rescate