

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
- Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
- El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La distancia del punto P al plano π . (3 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C , obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 puntos)
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C . (3 puntos)

PROBLEMA A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El dominio de la función h . Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (1 + 2 puntos)
- La asíntota de la curva $y = h(x)$. (4 puntos)
- La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (4 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} I & 4 \\ -I & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $A X = \alpha X$ solo admite una solución. (4 puntos)
- b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A X = 5 X$. (3 puntos)
- c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A X = 2 X$ y, sin

calcular la matriz A^{100} , obtener el valor de β tal que

$$A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ puntos})$$

PROBLEMA B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β . (5 puntos)
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (4 puntos)
- c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π . (2 puntos)

PROBLEMA B.3. un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 puntos)
- b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 puntos)
- d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 puntos)