

CATALUÑA · PAU 2013 · ORDINARIA

Matemáticas II

18 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Sabemos que el vector $(2, 1, -1)$ es una solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned} \right\}$$

Calcule el valor de los parámetros a , b y c .

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Sea $\pi : 3x - 2y + z = 10$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación continua de la recta r perpendicular a π que pasa por el punto $P = (-1, 3, 2)$.

b) 1 punto

Encuentre también la ecuación cartesiana (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_1 paralelo a π que pasa por el mismo punto P .

Ejercicio 1

OPCIÓN C 2 puntos

Sean π_1 el plano $2x + 3y - z = 4$ y π_2 el plano $x - 2y - 4z = 10$.

a) 1 punto

Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) 1 punto

Encuentre la ecuación continua de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 y que pasa por el punto $P = (-1, 3, 2)$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

La curva $y = x^2$ y la recta $y = k$, con $k > 0$, determinan una región plana.

a) 1,5 puntos

Calcule el valor del área de esta región en función del parámetro k .

b) 0,5 puntos

Encuentre el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}u^2$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Sea I la matriz identidad de orden 2.

a) 1 punto

Encuentre el valor del parámetro a para que se cumpla que $A^2 - 2A = I$.

b) 1 punto

Calcule la matriz inversa de la matriz A cuando $a = -2$.

Ejercicio 2

OPCIÓN C 2 puntos

La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

a) 1 punto

¿Para qué valores del parámetro a el sistema tiene una sola solución? ¿Cuál es esta solución única?

b) 1 punto

Resuelva el sistema si $a = 2$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) 0,5 puntos

¿Qué significa que la matriz B sea la matriz inversa de A ?

b) 1,5 puntos

Encuentre el valor del parámetro p para que la matriz inversa de A y la matriz transpuesta de A coincidan.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Dada la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ y la recta horizontal $y = k$, con $k > 0$;

a) 0,5 puntos

Haga un esbozo del recinto limitado por las gráficas de la función y la recta, y los ejes de coordenadas.

b) 1,5 puntos

Encuentre el valor de k sabiendo que el área de este recinto es igual a $14/3$.

Ejercicio 3

OPCIÓN C 2 puntos

Dados los puntos $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ y $R = (3, 2, -1)$,

a) 1 punto

Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que determinan.

b) 1 punto

Encuentre un punto S perteneciente a la recta $r : \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedro de vértices P , Q , R y S tenga un volumen igual a $1/2$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros. A la derecha tiene un esquema de la sección del canal.

a) 0,5 puntos

Encuentre el valor del segmento L de la gráfica en función de la variable x (anchura inferior del canal).

b) 0,5 puntos

Sabemos que el área de un trapecio es igual a la altura multiplicada por la semisuma de las bases. Compruebe que, en este caso, el área de la sección viene dada por

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) 1 punto

Calcule el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima (no es necesario que compruebe que es realmente un máximo).

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Un triángulo de área $3/2$ tiene dos de los vértices en los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vértice, R , es un punto de la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

y tiene la primera coordenada no nula. Calcule las coordenadas del vértice R .

Ejercicio 4

OPCIÓN C 2 puntos

Para $x \geq 1$, considere la función $f(x) = \sqrt{x-1}$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa igual a 10.

b) 1 punto

Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta de ecuación $x = 5$ y el eje OX.

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Dados los puntos $P = (1, 0, -1)$ y $Q = (-1, 2, 3)$, encuentre un punto R de la recta $r : \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ que cumpla que el triángulo de vértices P , Q y R es isósceles, en el que $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son los lados iguales del triángulo.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

En una semiesfera de radio R inscribimos un cono situando el vértice en el centro de la semiesfera, tal como se ve en el dibujo.

a) 0,5 puntos

Sabiendo que el volumen de un cono es igual al área de la base multiplicada por la altura y dividida por 3, compruebe que, en este caso, podemos expresar el volumen como

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

b) 1,5 puntos

Encuentre las dimensiones de este cono (el radio de la base y la altura) para que su volumen sea máximo y compruebe que se trata realmente de un máximo.

Ejercicio 5

OPCIÓN C 2 puntos

Considere los puntos $A = (-1, 2, 4)$ y $B = (3, 0, -2)$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación del plano formado por todos los puntos que equidistan de A y B .

b) 1 punto

Dado un punto $C = (x, y, z)$, dividimos el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales y obtenemos los puntos A, A_1, B y C . Encuentre el punto C .

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

La función $f(x)$ es derivable y pasa por el origen de coordenadas. La gráfica de la función derivada es la que ve aquí dibujada, siendo $f'(x)$ creciente en los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[2, +\infty)$.

a) 1 punto

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) 1 punto

Indique las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifique estos extremos.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabemos que la gráfica de esta función es tangente a la recta $r : y = x + 3$ en el punto de abscisa $x = -1$, y que en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente es paralela a la recta r . Calcule el valor de los parámetros a, b y c .

Ejercicio 6

OPCIÓN C 2 puntos

Un triángulo rectángulo situado en el primer cuadrante tiene el vértice A en el origen de coordenadas, el vértice $B = (x, 0)$ en el semieje positivo de abscisas y el vértice C pertenece a la recta $x + 2y = 8$. El ángulo recto es el que corresponde al vértice B .

a) 1 punto

Compruebe que el área del triángulo se puede expresar de la manera siguiente: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$

b) 1 punto

Encuentre los vértices B y C para que el área del triángulo sea máxima y compruebe que se trata realmente de un máximo.

Tu Profe al Rescate